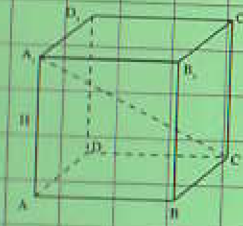
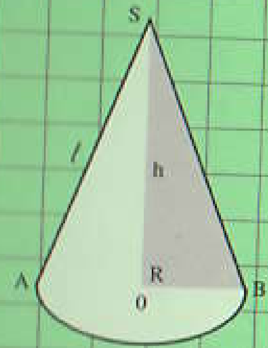
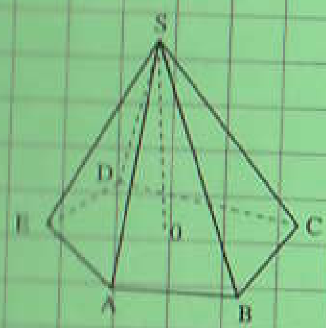
ՍՈՒՐԵՆ ԻՍԿԱՆԴԱՐՅԱՆ



ՏԱՐՐԱԿԱՆ ԴՊՐՈՑՈՒՄ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԵՎ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՆԱԽԱԳԻՏԵԼԻՔՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻԿԱՆ

Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ





www.zangak.am
www.dasagirq.am
www.book.am
9789994115068

Երաշխավորված է տպագրության
Խ. Աբովյանի անվան ՀՊՄՀ-ի նախադպրոցական,
սկզբնական և հատուկ
կրթության ֆակուլտետի խորհրդի կողմից

ԻՍԿԱՆԴԱՐՅԱՆ Ս. Ա.
Տարրական դպրոցում հանրահաշվական և երկրաչափական նախագիտելիքների ուսուցման մեթոդիկան\Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ: — Եր.: «Զանգակ-97», 2010. — 128 էջ::

Աշխատանքում մեկնաբանված է տարրական դպրոցում հանրահաշվական և երկրաչափական նյութերից որոշակի հարցերի ուսուցման մեթոդիկան:

Աշխատանքը նախատեսված է դասավարներ պատրաստող բուհերի և քոլեջների ուսանողների համար: Այն օգտակար կլինի նաև տարրական դպրոցում մաթեմատիկա դասավանդող ուսուցիչների համար:

ISBN 978–99941–1–506–8

СУРЕН АРАМОВИЧ ИСКАНДАРЯН

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОПЕДЕВТИКИ В НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЕ
Учебно–методическое пособие
(на армянском языке)

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Տարրական դպրոցում մաթեմատիկա դասավանդող ուսուցիչն աշա-
կերտների մեջ պետք է ձևավորի որոշակի պատկերացումներ «մաթեմա-
տիկական արտահայտություն», «հավասարություն», «հավասարում»,
«անհավասարություն», «անհավասարում», «փոփոխական» հասկա-
ցությունների մասին: Ուստի ուսուցիչն ինքը (դասվարը) պետք է լավ
իմանա այդ հասկացությունների մաթեմատիկական ճիշտ իմաստները:
Հանրահաշվական նյութի ներմուծումը մաթեմատիկայի տարրական
դասընթաց նպատակ ունի ավելի խորությամբ ու ամբողջությամբ բացա-
հայտելու թվաբանական հասկացությունների, օրենքների իմաստը:
Օգտվելով տառային պայմանանշաններից թվաբանական գործողու-
թյունների ուսուցված օրենքներն ընդհանրացվում են, գրառվում ընդհա-
նուր տեսքով:
Հանրահաշվական նյութն ուսուցվում է թվաբանական և երկրաչա-
փական նյութերի հետ համատեղ: Մասնավորապես, դա ակնառու է
հավասարումներ լուծելիս: Չնայած ներկայումս գործող ծրագրերում
հանրահաշվական նյութին մեծ տեղ չի հատկացված, բայց համոզված
ենք, որ հետագայում այն իր արժանի տեղը կգրավի մաթեմատիկայի
տարրական դասընթացում: Հենց այդ պատճառով է, որ աշխատությու-
նում քննարկված է նաև հանրահաշվական նյութի ուսուցումը:
Տարրական դպրոցում հանրահաշվական որոշ նյութերի ուսուցումը
աշակերտներին նախապատրաստում է հետագայում հանրահաշվի լավ
յուրացմանը:
Տարրական դասարաններում երկրաչափական նյութի ուսուցման
հիմնական նպատակն է աշակերտներին ծանոթացնել այնպիսի երկրա-
չափական պատկերների և մարմինների, ինչպիսիք են կետը, գիծը,
հատվածը, բեկյալ գիծը, բազմանկյունը, շրջանը, գունդը, գլանը, կոնը,
խորանարդը, ուղղանկյունանիստը և այլն, աշակերտներին սովորեցնել
գծագրական քանոնի և կարկինի միջոցով կառուցել որոշ հարթ երկրա-
չափական պատկերներ, գործնականորեն չափել որոշ հարթ պատկեր-
ների մակերեսները (ուղղակի և ոչ ուղղակի) և այլն:
Երկրաչափական նյութի ուսուցումը նպաստում է աշակերտների
տարածական պատկերացումների և մտածողության զարգացմանը, որը
հիմնականում կատարվում է լաբորատոր և գործնական աշխատանքնե-
րի միջոցով:
Նոր ծրագրերի պահանջները լիովին կատարելու համար ուսուցիչը

պետք է ոչ միայն ճիշտ մեկնաբանի գործող դասագրքերում տեղ գտած երկրաչափական նյութը, այլ նաև ինքը կարողանա կազմել կամ ուսումնաօժանդակ գրականությունից ընտրել լրացուցիչ նյութեր, խնդիրներ, որոնք կնպաստեն ուսումնական նյութի լավ յուրացմանը:

Դասվարը, ինչ դասագրքով էլ դասավանդի, պետք է նկատի ունենա, որ յուրաքանչյուր դաս երեխայի համար պետք է լինի հետաքրքիր, մատչելի ու պիտի լուծի երեք հիմնական խնդիր. զարգացնող, ուսուցանող, դաստիարակող:

Աշխատանքը գրելիս նկատի ենք ունեցել ինչպես հանրահաշվական, այնպես էլ երկրաչափական նյութերի ուսուցման հեռանկարները:

Տեսական հարցերը մեկնաբանվել են առանց ապացուցումների:

ԳԼՈՒԽ ԱՌԱՋԻՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ՆՅՈՒԹԻ ՈՒՍՈՒՑՈՒՄԸ

§ 1. ՄԵԹՈԴԱՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

§ 1.1. Հավասարություն, անհավասարություն

Սահմանում: Թվեր, գործողությունների նշաններ (և փակագծեր) պարունակող գրառումը, որն իմաստ ունի, կոչվում է թվային արտահայտություն:

Օրինակ՝ $7 + 2$, $5 - 3$, $4 + (2 + 2)$, $12 \cdot 3 + 4$ և այլն:

Որոշ հեղինակներ թվերը ևս անվանում են պարզ արտահայտություններ (3–ը, 4–ը արտահայտություններ են):

Տրված թվային արտահայտություններում կատարելով նշված գործողությունները՝ ստանում են որոշակի թիվ, որը կոչվում է այդ արտահայտության արժեք: Օրինակ՝

$12 + 7 = 19$, $24 : 3 + 6 = 14$, $3 \cdot 5 + 8 : 2 = 19$ և այլն:

Ինչպես երևում է բերված օրինակներից, կան արտահայտություններ, որոնք տարբերվում են իրենց պարունակած թվերով, նշված գործողություններով, սակայն նրանց թվային արժեքները նույնն են: Այդպիսի թվային արտահայտությունները կոչվում են նույնաքար հավասար: Վերը բերված օրինակներում $12 + 7$ և $3 \cdot 5 + 8 : 2$ արտահայտությունները նույնաքար հավասար են, որովհետև երկուսի թվային արժեքն էլ հավասար է 19–ի:

$12 + 7 = 3 \cdot 5 + 8 : 2$

Երբ գրառումները պարունակում են թվեր, գործողության նշաններ, փակագծեր, բայց իմաստ չունեն, ապա դրանք թվային արտահայտություններ չեն: Օրինակ՝ «5 –», $14 : (7 - 7)$, $(5 + 3) : (16 : 2 - 8)$ և այլն:

Սահմանում: Երկու թվային արտահայտությունների միացումը «հավասար է» նշանով կոչվում է թվային հավասարություն:

Օրինակ՝

$3 + 4 = 14 : 2$, $5 + 6 = 18 - 7$ և այլն:

Երբ a–ն և b–ն թվային արտահայտություններ են, ապա $a = b$՝ թվային հավասարություն է: Կարող ենք պայմանավորվել այսուհետ «թվային հավասարություն» բառակապակցության փոխարեն ասել «հավասարություն»:

Յուրաքանչյուր հավասարություն ասույթ է, որը կարող է լինել ճիշտ կամ կեղծ:

Թվային հավասարությունները օժտված են մի շարք հատկություններով, որոնք իմանալը դասավարի համար անհրաժեշտություն է: Առանց ապացուցման նշենք այդ հատկություններից մի քանիսը:

1. Եթե ճշմարիտ թվային հավասարության երկու մասին ավելացնենք միևնույն թիվը, ապա հավասարությունը չի խախտվի:

Օրինակ՝ $6-4=2$, $6-4+3=2+3$, $5=5$:

Ցանկացած a, b, c թվերի համար կունենանք.

$a=b \Rightarrow a+c=b+c$

2. Եթե հավասարության երկու մասից հանենք միևնույն թիվը, ապա հավասարությունը չի խախտվի:

$a=b \Rightarrow a-c=b-c$

Օրինակ՝

$7+4=22:2$

$7+4-5=22:2-5$

$11-5=11-5$

$6=6$

3. Տրված հավասարությունները մաս առ մաս գումարելիս հավասարությունը չի խախտվի:

Օրինակ՝

$$\begin{array}{r} 6:2=9:3 \\ +\; 8:4=7-5 \\ \hline (6:2)+(8:4)=9:3+(7-5) \\ 3+2=3+2 \\ 5=5 \end{array}$$

Եթե a–ն, b–ն, c–ն, d–ն ցանկացած թվեր են և $a=b$, իսկ $c=d$, ապա $a+c=b+d$:

4. Եթե հավասարության երկու մասը բազմապատկենք միևնույն թվով, ապա հավասարությունը չի խախտվի:

Օրինակ՝

$4+3=14:2$

$2\cdot(4+3)=2\cdot(14:2)$

$2\cdot 7=2\cdot 7$

$14=14$

Ընդհանուր դեպքում կունենանք.

$a=b \Rightarrow a\cdot c=b\cdot c$

5. Եթե հավասարության երկու մասը բաժանենք զրոյից տարբեր միևնույն թվի, ապա հավասարությունը չի խախտվի:

Օրինակ՝

$5+7=8+4$

$(5+7):2=(8+4):2$

$12:2=12:2$

$6=6$

Եթե $a=b$ և $c\neq 0$, ապա $a:c=b:c$:

6. Տրված հավասարությունները մաս առ մաս բազմապատկելիս հավասարությունը չի խախտվի:

$$\begin{array}{r} 5+3=6+2 \\ \times\; 7-4=2+1 \\ \hline (5+3)\cdot(7-4)=(6+2)\cdot(2+1) \\ 8\cdot 3=8\cdot 3 \\ 24=24 \end{array}$$

Ընդհանուր դեպքում կունենանք.

$(a=b$ և $c=d) \Rightarrow a\cdot c=b\cdot d$

Սահմանում: Երկու թվային արտահայտություններ միացված «<» (փոքր է) կամ «>» (մեծ է) նշանով, կոչվում է թվային անհավասարություն:

Օրինակ՝ $5>3$, $14-5<13$, $24:3<10$ և այլն:

$a>b$ և $c>d$ կամ $a<b$ և $c<d$ անհավասարությունները կոչվում են նույնիմաստ, իսկ $a>b$ և $c<d$ անհավասարությունները՝ հակիմաստ:

«>» և «<» նշանների օգտագործումը ցույց է տալիս տրված թվերի կամ արտահայտությունների միջև գոյություն ունեցող խիստ կարգային առնչությունը, իսկ $a\geqslant b$ կամ $a\leqslant b$՝ ոչ խիստ կարգային առնչությունը:

Առանց ապացուցման նշենք թվային անհավասարությունների մի քանի հատկություն:

1. Եթե անհավասարության երկու մասին ավելացնենք միևնույն թիվը, ապա անհավասարությունը չի խախտվի: Օրինակ՝

$5 < 8$

$5 + 3 < 8 + 3$

$8 < 11$

Ընդհանուր դեպքում կունենանք.

$a < b \Rightarrow a + c = b + c$, որտեղ a–ն, b–ն, c–ն կարող են լինել իրական թվեր:

2. Եթե անհավասարության երկու մասից հանենք միևնույն թիվը, անհավասարությունը չի խախտվի:

Օրինակ՝ $7 < 15$, $7 - 4 < 15 - 4$, $3 < 11$:

$9 > 5 \Rightarrow 9 - 3 > 5 - 3 \Rightarrow 6 > 2$:

Ընդհանուր դեպքում կունենանք.

$a > b \Rightarrow a - c > b - c$ կամ $a < b \Rightarrow a - c < b - c$:

3. Եթե անհավասարության երկու մասը բազմապատկենք միևնույն դրական թվով, ապա անհավասարությունը չի խախտվի: Օրինակ՝

$7 > 5 \Rightarrow 7 \cdot 2 > 5 \cdot 2 \Rightarrow 14 > 10$

$8 < 10 \Rightarrow 3 \cdot 8 < 3 \cdot 10 \Rightarrow 24 < 30$:

Ընդհանրապես,

եթե $a > b$ և $c > 0$, ապա $a \cdot c > b \cdot c$,

եթե $a < b$ և $c > 0$, ապա $a \cdot c < b \cdot c$:

4. Եթե անհավասարության երկու մասը բազմապատկենք միևնույն բացասական թվով, ապա անհավասարության նշանը կփոխվի հակառակի: Օրինակ՝

$7 > 4$, $(-3) \cdot 7 < (-3) \cdot 4 \Rightarrow -21 < -12$

$9 > 5$, $(-2) \cdot 9 < (-2) \cdot 5 \Rightarrow -18 < -10$

$3 < 8$, $(-3) \cdot 3 > (-3) \cdot 8 \Rightarrow -9 > -24$

Ընդհանրապես,

եթե $a > b$ և $c < 0$, ապա $a \cdot c < b \cdot c$,

եթե $a > b$ և $c > 0$, ապա $a \cdot c > b \cdot c$,

եթե $a < b$ և $c > 0$, ապա $a \cdot c < b \cdot c$,

եթե $a < b$ և $c < 0$, ապա $a \cdot c > b \cdot c$:

5. Նույնիմաստ անհավասարությունները մաս առ մաս կարելի է գումարել: Օրինակ՝

$$+\begin{array}{r} 3<7 \\ 5<9 \\ \hline 8<16 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 4>3 \\ 9>5 \\ \hline 13<8 \end{array}$$

Ընդհանուր դեպքում կունենանք.

$$+\begin{array}{r} a>b \\ c>d \\ \hline a+c>b+d \end{array} \qquad +\begin{array}{r} a<b \\ c<d \\ \hline a+c<b+d \end{array}$$

§ 1.2. Մեկ փոփոխականով հավասարում և անհավասարում

Դիտարկենք $2x + 1$ գրառումը: Այն պարունակում է թվեր, թվաբանական գործողություն և՝ տառը (x): Եթե x–ին տանք թվային արժեքներ, ապա կստանանք տարբեր թվային արտահայտություններ:

$2x + 1$ տեսքի գրառումներն անվանում են փոփոխական պարունակող արտահայտություն: Եթե փոփոխական պարունակող արտահայտությունները նշանակենք $f(x)$, $g(x)$ և այլն, որոնք մաթեմատիկայում անվանում են նաև թվային ձև, ապա մեկ փոփոխականով հավասարման սահմանումը կարելի է ձևակերպել այսպես.

Սահմանում: Մեկ փոփոխականով հավասարումը երկու արտահայտությունների միացումն է «=» նշանով, որոնցից գոնե մեկը թվային ձև է:

Ընդհանուր տեսքով կարելի է գրել այսպես.

$f(x) = g(x)$ կամ՝ $f(x)=a$, որտեղ $f(x)$–ը թվային ձև է, իսկ a–ն՝ թիվ է:

Որոշ դեպքերում մեկ փոփոխականով հավասարումը սահմանվում է այսպես.

Սահմանում: Հավասարում է կոչվում այն երկու արտահայտությունների հավասարությունը, որոնցից գոնե մեկը պարունակում է փոփոխական:

Օրինակ՝ $2 + x = 5$, $3 + x = 2 + 7$ և այլն:

Հավասարման երկու մասն էլ կարող են փոփոխական պարունակել: Օրինակ՝ $4 + x = 8 - x$:

Սահմանում: Լուծել հավասարումը նշանակում է գտնել նրա արմատների կամ լուծումների բազմությունը:

Հավասարման լուծումների բազմություն է կոչվում փոփոխականի արժեքների այն բազմությունը, որի յուրաքանչյուր տարր, տեղադրելով փոփոխականի փոխարեն տրված հավասարման մեջ, ստացվում է ստույգ թվային հավասարություն: Օրինակ՝

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x_1 = 2,\ x_2 = 3$

Այս հավասարման լուծումների բազմությունն է $\{2, 3\}$:

Եթե $x = 2$, ապա.

$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$

$4 - 10 + 6 = 0$

$0 = 0$ ստույգ է:

Եթե $x = 3$, ապա.

$3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$

$9 - 15 + 6 = 0$

$0 = 0$ ստույգ է:

Հավասարումը լուծելու համար այն որոշ ձևափոխությունների ենթարկելով՝ բերում են ավելի պարզ տեսքի: Այդ ձևափոխությունները այնպիսին պետք է լինեն, որ ստացված ու տրված հավասարումների արմատները լինեն նույնը: Այլ կերպ ասած՝ նրանց լուծումների բազմությունները իրար հավասար լինեն: **Այդ դեպքում ասում են, որ այդ հավասարումները համարժեք են:** Կան թեորեմներ, նրանցից բխող հետևանքներ, որոնց կիրառումը հնարավորություն է տալիս հավասարումները ենթարկել համապատասխան ձևափոխությունների: Առանց ապացուցման նշենք դրանցից մի քանիսը:

1) Հավասարման ցանկացած անդամ նրա մի մասից կարելի է տեղափոխել մյուս մասը հակառակ նշանով, որի հետևանքով ստացված հավասարումը կլինի համարժեք տրվածին:

Օրինակ՝

$2x + 3 = 18 - x$, որի արմատը 5–ն է:

$2x + x = 18 - 3$

$3x = 15$

$x = 5$

2) Եթե հավասարման երկու մասերը բազմապատկենք կամ բաժանենք զրոյից տարբեր որևէ թվի, կստանանք տրվածին համարժեք հավասարում:

Օրինակ՝ $2 \cdot (4 + x) = 2 \cdot (10 - x)$ հավասարման երկու մասը բաժանելով 2–ի, կստանանք. $4 + x = 10 - x$, $2x = 6$, $x = 3$:

Եթե լուծենք տրված հավասարումը՝ $2 \cdot (4 + x) = 2 \cdot (10 - x)$, ապա նորից կստանանք $x = 3$:

Եթե $\frac{1}{2}(x + 4) = \frac{1}{2}(2x - 2)$ հավասարման երկու մասը բազմապատկենք 2–ով, ապա կստանանք $x + 4 = 2x - 2$ հավասարումը, որը համարժեք է տրվածին:

3) Եթե $f(x) = g(x)$ հավասարումը և $k(x)$ արտահայտությունն ամենուրեք որոշված են միևնույն A բազմությունում, ապա $f(x) = g(x)$ և $f(x) + k(x) = g(x) + k(x)$ հավասարումները համարժեք են:

Հետևանք: Եթե հավասարման երկու մասին գումարենք միևնույն թիվը, ապա կստանանք տրվածին համարժեք հավասարում:

Օրինակ՝ $3(x + 2) = 2(x + 4)$, որի արմատն է 2–ը:

Եթե հավասարման երկու մասին գումարենք 5 և ստացված հավասարումը լուծենք, ապա նորից կստանանք, որ $x = 2$:

4) Եթե $f(x) = g(x)$ հավասարումը և $k(x)$ արտահայտությունն ամենուրեք որոշված են միևնույն A բազմությունում, ընդ որում՝ $k(x) \neq 0$, ապա $f(x) = g(x)$ և $f(x) \cdot k(x) = g(x) \cdot k(x)$ հավասարումները համարժեք են:

Սահմանում: Մեկ փոփոխականով անհավասարում է կոչվում երկու արտահայտությունների միացումը «>» (մեծ) կամ «<» (փոքր) նշանով, երբ արտահայտություններից գոնե մեկը թվային ձև է:

Ընդհանուր դեպքում կունենանք. $f(x) > g(x)$ կամ $f(x) < g(x)$:

Լուծել անհավասարումը նշանակում է գտնել փոփոխականի այն արժեքները, որոնց տեղադրումից անհավասարումը փոխարինվում է ճշգրիտ անհավասարությամբ: Ի տարբերություն հավասարումների՝ անհավասարումների լուծումների բազմությունն անվերջ է:

Անհավասարումները լուծելիս դրանք ենթարկվում են ձևափոխությունների՝ մինչև պարզագույն անհավասարում ստանալը: Ձևափոխություններից ստացված անհավասարումը տրվածին համարժեք կլինի, երբ համարժեք ձևափոխություններ կատարվեն:

Սահմանում: Երկու անհավասարումներ կոչվում են համարժեք, եթե նրանց լուծումների բազմությունները հավասար են:

Առանց ապացուցման նշենք անհավասարումների համարժեքության մի քանի հատկություն:

1) Անհավասարման յուրաքանչյուր անդամ նրա մի մասից կարելի է տեղափոխել մյուս մասը՝ հակառակ նշանով: Օրինակ՝

$2x + 3 > x + 4$

$2x - x > 4 - 3$

2) Եթե անհավասարման երկու մասերը պարունակում են նույն նշաններով նույն անդամները, ապա դրանք կարելի է դեն գցել: Օրինակ՝

$5x + 3 > 7x + 3$

$2x > 7x$

3) Անհավասարման երկու մասերը բազմապատկելով միևնույն դրական թվով՝ կստանանք տրվածին համարժեք անհավասարում: Օրինակ՝

$x > 3$

$2x > 2 \cdot 3$

4) Անհավասարման երկու մասերը բազմապատկելով միևնույն բացասական թվով և փոխելով անհավասարման նշանը՝ կստանանք տրվածին համարժեք անհավասարում:

Օրինակ՝ $x < 5$ անհավասարման երկու մասերը բազմապատկելով (-2)–ով՝ կստանանք $-2x > 2 \cdot 5$:

§ 1.3. Երկու փոփոխականով արտահայտություն

Մաթեմատիկայի տարրական դասընթացում հանդիպում ենք այսպիսի առաջադրանքների.

1. Գտնել $2a + b$ արտահայտության թվային արժեքը, եթե $a = 5$, $b = 4$:

2. Լրացնել աղյուսակը.

a	3	6	11	17	8	21
b	5	3	9	7	19	18
a + b						

Փաստորեն, մենք գործ ենք ունենում երկու փոփոխական պարունակող արտահայտությունների հետ: Նման առաջադրանքները կատարելիս փոփոխականներին արժեքներ են տրվում բնական թվերի բազմությունից, ընդ որում՝ $a - b$ և $a : b$ տեսքի արտահայտությունների արժեքները հաշվելիս a–ին և b–ին տրվում են այնպիսի արժեքներ, որպեսզի հանման, բաժանման գործողությունները տեղի ունենան: Օրինակ՝

1) գտնել $a - b$ տարբերության թվային արժեքը, եթե $a = 27$, $b = 13$ $(a > b)$,

2) գտնել $a : b$ քանորդի թվային արժեքը, եթե $a = 24$, $b = 6$ (a–ն b–ի բազմապատիկն է):

Ընդհանուր տեսքով երկու փոփոխական պարունակող արտահայտությունը գրվում է՝ $f(x, y)$, ընդ որում՝ տրվում են նաև փոփոխականների որոշման տիրույթները (կամ տիրույթը):

Եթե $f(x, y)$ և $g(x, y)$ արտահայտությունները միացնենք «=» նշանով, ապա կստանանք երկու անհայտով հավասարում.

$f(x, y) = g(x, y)$

Առաջին աստիճանի երկանհայտ հավասարումը գրում են՝ $ax + by = c$:

Օրինակ՝ $x + 2y = 8$, $x, y \in N$:

Այս հավասարմանը կբավարարեն (2; 3), (4; 2), (6; 1) թվազույգերը:

§ 1.4. Համապատասխանություն: Ֆունկցիա: Ուղիղ և հակադարձ համեմատականություն

Տարրական դպրոցի մաթեմատիկայի դասագրքերում հանդիպում ենք այնպիսի առաջադրանքների, երբ պահանջվում է առանց հաշվելու իմանալ, թե ո՞ր հավաքածուի մեջ է նկարների (պատկերների) քանակը շատ, որում՝ քիչ: Այդ առաջադրանքի կատարման համար փաստորեն պետք է փոխմիարժեք համապատասխանություն ստեղծել երկու վերջավոր բազմությունների տարրերի միջև:

Սահմանում: X և Y բազմությունների միջև տրված R համապատասխանությունը (առնչությունը) կոչվում է փոխմիարժեք, եթե X–ի յուրաքանչյուր տարրին համապատասխանում է Y–ի միակ տարրը և Y–ի յուրաքանչյուր տարր համապատասխանում է X–ի միակ տարրին:

Օրինակ՝ իրական թվերի բազմության և թվային առանցքի կետերի բազմության միջև կարելի է ստեղծել (գոյություն ունի) փոխմիարժեք համապատասխանություն. յուրաքանչյուր իրական թվի թվային առանցքի վրա համապատասխանում է միակ կետը և ընդհակառակը:

Սահմանում: X և Y բազմությունների միջև տրված համապատասխանությունը կոչվում է ֆունկցիա, եթե X բազմության յուրաքանչյուր տարրին համապատասխանեցվում է Y բազմության միակ տարրը:

$Y = kx$ ֆունկցիան ուղիղ համեմատականության բանաձևն է:

$Y = kx + b$ գծային ֆունկցիայի բանաձևն է:

Սահմանում: Երկու փոփոխականների ֆունկցիոնալ կապը կոչվում է ուղիղ համեմատական, եթե դրանցից մեկը մի քանի անգամ մեծացնելու (փոքրացնելու) դեպքում նույնքան անգամ մեծանում (փոքրանում) է մյուսը:

Օրինակ՝ եթե 1 կգ ճարինջն արժե 400 դրամ, ապա 2 կգ–ը կարժենա 800 դրամ:

Սահմանում: Երկու փոփոխականների ֆունկցիոնալ կախվածությունը կոչվում է հակադարձ համեմատական, եթե դրանցից մեկը մի քանի անգամ մեծացնելու (փոքրացնելու) դեպքում մյուսը նույնքան անգամ փոքրանում (մեծանում) է:

Ընդհանուր տեսքով գրվում $Y = \frac{k}{x} (x \neq 0)$: k–ն համեմատականության գործակիցն է:

Մաթեմատիկայի տարրական դասընթացից հայտնի է մարմնի հավասարաչափ շարժման արագության, ժամանակի և անցած ճանապարհի միջև եղած առնչությունը. $S = Vt$, որտեղից՝ $V = S : t$, $t = S : V$:

Եթե շարժվող մարմնի արագությունը մեծացվի մի քանի անգամ, ապա ժամանակը կփոքրանա նույնքան անգամ:

Եթե $S = 240$ կմ, $V = 40$ կմ/ժ, ապա $t = 6$ ժամ:

Եթե $S = 240$ կմ, $V = 80$ կմ/ժ, ապա $t = 3$ ժամ:

§ 1.5. Թվաբանական գործողությունների որոշ օրենքների գրառումը տառերով

Տառային պայմանանշանների օգտագործման միջոցով ընդհանրացվում են թվաբանական գործողությունների որոշ օրենքներ: Համառոտակի ճշենք որոշ օրենքներ ու ելնելով բազմությունների տեսությունից՝ մեկնաբանենք դրանք: Քանի որ տարրական դպրոցում թվաբանական գործողությունների իմաստը անուղղակի ձևով մեկնաբանվում է բազմությունների տեսության տարրերի միջոցով, ուստի դասվարը պետք է իմանա դրանց իմաստը:

Վերցվոր A բազմության տարրերի թիվը նշանակում են n(A)–ով:

Գումարման գործողության իմաստը մեկնաբանելիս դասվարը կատարում է երկու բազմությունների միավորում, որոնք ընդհանուր տարրեր չունեն: A և B բազմությունների միավորումը գրում են. $A \cup B$:

1) Գումարման տեղափոխական հատկությունը.

$a + b = b + a$

Գումարելիների տեղափոխությունից գումարը չի փոխվում: Իրոք, եթե $n(A) = a$, $n(B) = b$, ապա $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = a + b$: Քանի որ $A \cup B = B \cup A$, ապա $n(A \cup B) = n(B \cup A) = n(B) + n(A) = b + a$: Ուրեմն՝ $a + b = b + a$:

2) Գումարման զուգորդական հատկությունը.

$(a + b) + c = a + (b + c)$

3) Արտադրյալի տեղափոխական հատկությունը.

$a \cdot b = b \cdot a$

4) Արտադրյալի զուգորդական հատկությունը.

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

5) Թվից գումար հանելը.

$a - (b + c) = (a - b) - c, a \geqslant b + c$

$a - (b + c) = (a - c) - b, a \geqslant b + c$

6) Գումարից թիվ հանելը.

$(a + b) - c = (a - c) + b, a \geqslant c$

$(a + b) - c = a + (b - c), b \geqslant c$

7) Բազմապատկման բաշխական օրենքը գումարի նկատմամբ.

$(a + b) \cdot c = ac + bc$

$a \cdot (b + c) = ab + ac$

Օրինակ՝

$(4 + 5) \cdot 2 = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 8 + 10 = 18$

$3 \cdot (5 + 6) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 15 + 18 = 33$

Տարրական դասարաններում գումարի տեղափոխական և զուգորդական հատկությունները հաճախ կիրառվում են միաժամանակ: Օրինակ՝

$36 + 72 + 64 + 28 = (36 + 64) + (72 + 28) = 100 + 100 = 200$

§ 2. ՏԱՐՐԱԿԱՆ ԴՊՐՈՑՈՒՄ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ՆՅՈՒԹԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ՆՊԱՏԱԿՆԵՐԸ

Մաթեմատիկայի տարրական դասընթացում հանրահաշվական նյութի ընդգրկումը այն պատճառներից մեկն է, որ այդ դասընթացը անվանվում է ոչ թե «Թվաբանություն», այլ «Մաթեմատիկա»:

Տարրական դպրոցում հանրահաշվական նյութն ուսումնասիրվում է թվաբանական նյութի հետ սերտորեն կապված: Այդ կապը մասնավորապես երևում է նրանցից, որ տարրական դպրոցում հավասարումների լուծման հիմնական մերոդը թվաբանական գործողությունների բաղադրիչների և արդյունքի միջև եղած կախվածության բացահայտումն է:

Դասվարը պետք է իմանա, որ տարրական դպրոցում ուսուցվող հանրահաշվական հասկացությունները աշակերտների համար գիտականորեն չեն սահմանվում, դա կատարվում է բարձր դասարաններում:

Տարրական դպրոցում հանրահաշվական նյութի ուսումնասիրման հիմնական նպատակները պետք է լինեն.

1) Թվաբանական նյութի գիտական բարձր մակարդակով յուրացումը և ընդհանրացումը:

2) Աշակերտների մեջ ձևավորել կարևորագույն մաթեմատիկական հասկացություններ՝ մաթեմատիկական արտահայտություն, հավասարություն, հավասարում, անհավասարություն, անհավասարում:

3) Տառային պայմանանշանների ներմուծումը, որը հնարավորություն է տալիս ընդհանրացնել ուսումնասիրած թվաբանական գործողությունների որոշ օրենքներ:

4) Աշակերտների մեջ պատկերացումներ ստեղծել փոփոխականի մասին: Նրանց մեջ ոչ բացահայտ կերպով ստեղծել պատկերացումներ ֆունկցիոնալ կախվածության մասին:

5) Հանրահաշվական եղանակով թվաբանական խնդիրների լուծումը:

6) Աշակերտների մեջ նախագիտելիքների ստեղծումը, որպեսզի բարձր դասարաններում հեշտությամբ յուրացնեն հանրահաշվական նյութը:

Բացի այս հիմնական նպատակներից՝ յուրաքանչյուր դասվար պետք է պարզ պատկերացում ունենա հանրահաշվական այս կամ այն հարցի ուսուցման կոնկրետ նպատակների և մեթոդների մասին: Բերենք օրինակներ.

1. Մաթեմատիկական արտահայտություններին աշակերտները փաստորեն ծանոթանում են թվաբանական գործողությունների ուսուցման հետ միաժամանակ, սակայն չեն ծանոթանում «արտահայտություն», «արտահայտության արժեք» հասկացություններին: Դասվարը պետք է լավ պատկերացում ունենա այդ հասկացությունների ուսուցման հեռանկարների մասին: Նա պետք է երեխաներին նախապատրաստի այդ հասկացությունների ուսուցմանը: Այդ նպատակով աշակերտներին պետք է սովորեցնի, որ նրանք կարողանան ճիշտ կարդալ տրված երկու թվերի գումարը կամ տարբերությունը: Օրինակ՝ 5 + 3 տեսքի գումարները հաշվելիս նրանք պետք է ասեն. «Ունենք երկու թվերի գումար. այդ թվերն են 5–ը և 3–ը», կամ «5 + 3–ը 5 և 3 թվերի գումարն է, որը հավասար է 8–ի»:

2. Սկսած հենց առաջին դասարանից՝ աշակերտները համեմատում են թվերը և ասում, թե նրանցից որն է մեծ, իսկ որը փոքր, և դնում են համապատասխան նշանը: Կատարելով նման տիպի վարժություններ՝ ուսուցիչն աշակերտներին նախապատրաստում է թվային արտահայտություններ համեմատելուն և «>», «<» նշանների օգտագործմանը:

Հետագայում աշակերտները սկսում են համեմատել թվային արտահայտությունները՝ գրված գումարի կամ տարբերության տեսքով:

Սկզբնական շրջանում աշակերտները այդ համեմատումը կատարում են նախօրոք հաշվելով տրված արտահայտությունների թվային արժեքները, իսկ հետագայում համեմատումը կատարվում է տրամաբանական դատողությունների միջոցով: Օրինակ՝ $3 + 2 \otimes 3 + 4$ արտահայտությունները համեմատելու համար հաշվում են նրանց թվային արժեքները ու համեմատում ստացված արդյունքները՝ $5 < 7$: Սակայն հետագա դասերի ընթացքում աշակերտները պետք է դատեն այլ կերպ. առաջին գումարելիներն իրար հավասար են, իսկ երկրորդ գումարի 2–րդ գումարելին մեծ է առաջին գումարի երկրորդ գումարելիից, նշանակում է առաջին գումարը փոքր է 2–րդ գումարից՝ $3 + 2 < 3 + 4$:

Եթե աշակերտները տրամաբանական դատողությունների միջոցով չեն կարողանում միանգամից որոշել, թե տրված արտահայտություններից որն է մեծ, իսկ որը փոքր, ապա պետք է պահանջել, որ նրանք հաշվեն տրված արտահայտությունների թվային արժեքները և համեմատեն ստացված արդյունքները:

Ուսուցիչը պետք է լավ գիտակցի, որ տարբեր տեսքի արտահայտությունների համեմատումը նպաստում է թվաբանական գործողությունների և նրանց հատկությունների ավելի խոր ու գիտական բարձր մակարդակով ուսումնասիրմանը:

Մաթեմատիկայի ուսուցման հետագա փուլերում համեմատվում են ավելի բարդ տեսքի թվային արտահայտություններ, որոնց ճիշտ համեմատումը նպաստում է երեխաների մեջ մաթեմատիկայի նկատմամբ հետաքրքրություններ առաջացնելուն: Մասնավորապես, նրանց մեջ սերմանվում է վստահություն՝ կատարած գործողությունների նկատմամբ, ինքնատուգման սովորություն և այլն:

3. Տառային պայմանանշանների ներմուծումը նպաստում է թվաբանական նյութի ավելի խոր ու ընդհանրացված ուսուցմանը:

Տառը հանդես է գալիս որպես մաթեմատիկական պայմանանշան: Աշակերտները սովորում են գտնել մեկ տառ պարունակող արտահայտության թվային արժեքը, տրված արժեքների դեպքում՝ համեմատել տառեր պարունակող արտահայտություններ:

4. Տարրական դպրոցում թվային հավասարությունների և անհավասարությունների ուսուցումը կատարվում է թվային արտահայտությունների ուսուցման հետ համատեղ և հեշտացնում է այն նյութը, որ աշակերտներն ավելի լավ յուրացնեն ուսուցվող նյութը:

Ուսուցման սկզբնական շրջանում ուսուցիչը կարող է առաջադրել հետևյալ բովանդակությամբ հարցեր.

ա) Աշոտը 5–ին ավելացրեց 4 և ստացավ 8: Աշոտը ճի՞շտ է լուծել վարժությունը:

բ) Ճի՞շտ են արդյոք $4 < 5$, $7 < 8$, $9 < 6$ անհավասարությունները:

5. Հավասարումների և անհավասարումների ուսուցումը տարրական դասարաններում նպաստում է տեսական նյութի ավելի լավ յուրացմանը:

§3. ԹՎԱՅԻՆ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻԿԱՆ

Առաջին դասարանում աշակերտները առարկայական բազմությունների հետ գործողություններ կատարելով՝ յուրացնում են գումարման և հանման գործողությունների իմաստը: Նրանք $4 + 1$, $5 - 2$ տեսքի գրառումներում «+» և «–» նշանները ընկալում են որպես «ավելացնել», «պակասեցնել» տերմինների կրճատ գրառում:

Տասի սահմանում թվարկության ուսուցման ժամանակ աշակերտները ծանոթանում են «մեծացնել», «փոքրացնել» տերմիններին: Դա նպաստում է գումարման և հանման գործողությունների մասին նրանց գիտելիքների խորացմանը և ընդլայնմանը: Աշակերտները $4 + 2$ գումարը կարդում են՝ 4–ը մեծացնելով 2–ով՝ կստանանք 6, իսկ $5 - 3$ տեսքի տարբերությունը՝ 5–ը փոքրացնելով 3–ով՝ կստանանք 2:

10–ի սահմանում գումարման և հանման գործողությունների ուսուցման ժամանակ աշակերտները ծանոթանում են երկու թվերի գումարին՝ որպես թվային արտահայտության.

$$\underbrace{4 + 2}_{\text{գումար}} = \underbrace{6}_{\text{գումար}}$$

«Գումար» հասկացության՝ որպես արտահայտության անվանում, աշակերտների գիտելիքներն ամրապնդելու նպատակով կարելի է քննարկել հետևյալ բովանդակությամբ վարժություններ.

ա) Գրել 5 և 3 թվերի գումարը:

բ) Կարդալ $4 + 3$ գրառումը:

գ) Հաշվել $6 + 2$ գումարը:

դ) Գտնել 5 և 2 թվերի գումարը և այլն:

Մաթեմատիկայի ուսուցման ընթացքում դասվարը պետք է հասնի նրան, որ աշակերտներն ընկալեն գումարման նշանի երկակի իմաստը.

1) ցույց է տալիս թվաբանական այն գործողությունը, որը պետք է կատարել տրված թվերով,

2) ծառայում է մաթեմատիկական արտահայտությունը գրելուն:

Նման աշխատանքը պետք է կատարվի նաև «տարբերություն» հասկացության ձևավորման ժամանակ:

10–ի սահմանում գումարման և հանման գործողությունների ուսուցման ժամանակ պետք է ուսումնասիրել այնպիսի արտահայտություններ, որոնցում գումարման և հանման նշանները կրկնվում են մի քանի անգամ: Օրինակ՝ $4 + 1 + 1$, $5 + 1 + 1$, $7 - 1 - 1$ և այլն:

Նպատակահարմար է քննարկել նաև այնպիսի թվային արտահայտություններ, որոնք պարունակում են թե՛ գումարման, թե՛ հանման նշաններ: Օրինակ՝ $5 + 3 - 2$, $7 + 1 - 3$ և այլն:

Հաշվելով նման տիպի թվային արտահայտությունների արժեքները՝ աշակերտները փաստորեն ձեռք են բերում որոշակի գիտելիքներ թվաբանական գործողությունների կատարման հաջորդականության մասին:

«Թվային արտահայտություն» կամ «արտահայտություն», «արտահայտության արժեք» հասկացությունները աշակերտների մեջ ձևավորվում են կոնկրետ օրինակների միջոցով: Այդ նպատակով գրատախտակին գրառվում են որոշ արտահայտություններ՝ $12 + 3$, $22 - 4$ և այլն: Աշակերտներին ասվում է, որ դրանք մաթեմատիկական արտահայտություններ են: Պետք է սովորեցնել, որ երեխաները ճիշտ կարդան այդ գրառումները. «12 և 3 թվերի գումարը», «22 և 4 թվերի տարբերությունը» և այլն: Հաշվելով գումարը (տարբերությունը)՝ ստանում ենք որոշակի թիվ, որը կոչվում է տրված արտահայտության թվային արժեք: Բերված օրինակների համար 15–ը և 18–ը (համապատասխանաբար) հանդիսանում են տրված թվային արտահայտությունների արժեքները:

Աշակերտների գիտելիքներն ամրապնդելու նպատակով պետք է պահանջել, որ նրանք հաշվեն տրված արտահայտությունների թվային արժեքները:

Աշակերտներին բազմապատկման և բաժանման գործողություններին ծանոթացնելուց հետո ուսուցիչը պետք է մեկնաբանի այդ գործողությունների նշանների երկակի իմաստը՝ որպես գործողության նշան և որպես թվային արտահայտության գրելու միջոց:

Հետագայում աշակերտներին պետք է ծանոթացնել նաև այնպիսի թվային արտահայտությունների, որոնք պարունակում են թե՛ առաջին, թե՛ երկրորդ աստիճանի թվաբանական գործողությունների նշաններ: Օրինակ՝ $2 \cdot 3 - 4$, $3 \cdot 4 - 5$, $2 \cdot 5 + 12$, $8 \cdot 2 - 12$ և այլն:

Այս տիպի թվային արտահայտությունների արժեքները հաշվելու համար աշակերտները պետք է իմանան, որ նախ պետք է կատարել երկրորդ աստիճանի, իսկ հետո առաջին աստիճանի գործողությունները:

Աշակերտների տրամաբանական մտածողությունը զարգացնելու նպատակով պետք է քննարկել այնպիսի վարժություններ, որոնցում տրված է թվային արտահայտությունը և նրա արժեքը ու պահանջվում է օգտագործել փակագծերն այնպես, որ ստացվի ճիշտ թվային հավասարություն:

$38 - 30 - 8 = 0$

$49 - 10 + 7 = 46$

$30 - 5 + 2 = 27$ և այլն:

Ավելի դժվար են այն վարժությունները, որոնցում բացակայում են թե՛ թվաբանական գործողության նշանները, թե՛ փակագծերը: Սակայն հենց այդ բովանդակությամբ վարժություններն են ավելի մեծ հետաքրքրություն առաջացնում աշակերտների մեջ: Օրինակ՝ դնել փակագծերը և թվաբանական գործողությունների նշանները այնպես, որ ստացվի ճիշտ գրառում.

$34 \otimes 3 \otimes 9 = 22$

$75 \otimes 8 \otimes 3 = 70$ և այլն:

Հետագայում աշակերտները ծանոթանում են այնպիսի մաթեմատիկական արտահայտությունների, որոնք պարունակում են տառով նշանակված մեկ կամ երկու փոփոխական: Ուսուցման ընթացքում դասվարը պետք է հասնի նրան, որ աշակերտները հասկանան՝ մաթեմատիկական արտահայտություններում տառերը կարող են ընդունել ցանկացած արժեք, որ տառերով նշանակվում է ոչ թե մեկ կոնկրետ, որոշակի, այլ՝ ցանկացած թիվ:

Աշակերտները որոշակի դժվարության են հանդիպում բառը արտահայտություններ կարդալիս: Այդ դժվարությունը հաղթահարելու համար պետք է քննարկել կոնկրետ օրինակներ, դրանց միջոցով հասկացնել, որ հաշվի առնեն՝ վերջում ինչ գործողություն պետք է կատարել, ըստ այդմ էլ ասեն, թե ինչ արտահայտություն է տրված: Օրինակ՝ $23 - 2 \cdot 4$ արտահայտությունը պետք է կարդացվի. «Տրված է երկու թվերի տարբերություն,

որտեղ նվազելին հավասար է 23-ի, իսկ հանելին պատկերված է 2 և 4 թվերի արտադրյալի տեսքով»:

Աշակերտները պետք է լավ գիտակցեն, որ տառեր պարունակող արտահայտությունների արժեքը կարելի է հաշվել, եթե կոնկրետ տրված են այդ տառերի թվային արժեքները: Օրինակ՝ հաշվել $a + b$ արտահայտության արժեքը, եթե $a = 5$, $b = 12$:

Արտահայտությունների արժեքները հաշվելու համար հաճախ գրառումները կատարում են աղյուսակի տեսքով.

a	5	7	21	30	17	9
b	3	4	18	21	13	7
a–b						

Նկ. 1

c	12	24	32	36
d	6	3	8	9
c:d				

Նկ. 2

Տառեր պարունակող արտահայտությունների արժեքները հաշվելիս պետք է նկատի ունենալ, որ բնական թվերի բազմությունում միշտ չէ, որ գոյություն ունի երկու թվերի տարբերությունը և քանորդը: Այդ պատճառով էլ $a - b$, $a : b$ տեսքի արտահայտությունների թվային արժեքները հաշվելու համար պետք է նկատի ունենալ, թե b-ն ինչ արժեքներ կարող է ընդունել: Առաջին դեպքում միշտ պետք է $a \geqslant b$, իսկ երկրորդ դեպքում $b \neq 0$ և a-ն b-ի բազմապատիկը լինի: Նպատակահարմար է քննարկել նաև հետևյալ բովանդակությամբ վարժություններ.

1) Գործողության նշանների միջոցով գրի՛ր a և b թվերի գումարը ու փոքրացրու 25-ով: Հաշվի՛ր ստացած արտահայտության արժեքը, եթե $a = 37$, $b = 48$:

2) Գիտենալով, որ $a + b = 30$՝ հաշվի՛ր $(a + b) + 15$ արտահայտության թվային արժեքը:

3) Գրի՛ր a և b թվերի քանորդը և հաշվի՛ր ստացված արտահայտության թվային արժեքը, եթե $a = 48$, $b = 8$ և այլն:

Հետագայում պետք է քննարկել նաև այնպիսի վարժություններ, որոնցում պահանջվում է համեմատել տրված արտահայտությունները ու դնել համապատասխան նշանը՝ «>», «<», «=»: Օրինակ՝

$27 + 13 \otimes 14 + 32$

$64 : 8 + 3 \otimes 64 + 3$

$72 - 14 : 7 \otimes 72 + 14 : 7$ և այլն:

Տարրական դպրոցում մաթեմատիկական արտահայտությունների և տառային պայմանանշանների օգտագործման մասին աշակերտների գիտելիքները կարելի է ընդլայնել, եթե թվային օրինակներ լուծելու միջոցով հիմնավորվեն, իսկ տառերի միջոցով գրվեն գումարի տեղափոխական և զուգորդական օրենքները՝

$a + b = b + a$

$(a + b) + c = a + (b + c)$

Այդ գրառումների յուրացումից հետո աշակերտներից պետք է պահանջել, որ նրանք հաշվեն տրված արտահայտության արժեքը՝ նրա մեջ պարունակվող տառերի՝ տրված արժեքների դեպքում: Օրինակ՝ հաշվել $a + b + c$ արտահայտության արժեքը, եթե $a = 37$, $b = 23$, $c = 14$:

Օգտվելով գումարի զուգորդական օրենքից՝ աշակերտները պետք է հասկանան, որ այդ գումարն ավելի հեշտ կգտնվի, եթե նախ 37–ին ավելացնենք 23, իսկ հետո՝ ստացված արդյունքին՝ 14–ը.

$a + b + c = 37 + 23 + 14 = (37 + 23) + 14 = 60 + 14 = 74$

Տարրական դպրոցում տառերի միջոցով կարելի է գրառել նաև բազմապատկման տեղափոխական և զուգորդական, գումարի նկատմամբ բազմապատկման բաշխական օրենքները՝

$a \cdot b = b \cdot a$

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$a \cdot (b + c) = ab + ac$ կամ

$(a + b) \cdot c = ac + bc$

Այս տիպի արտահայտությունների թվային արժեքը գտնելու համար տառերի՝ տրված արժեքների դեպքում աշակերտները պետք է ընտրեն ամենահարմար եղանակը: Օրինակ՝

1) $13 \cdot 4 \cdot 5$ արտահայտության թվային արժեքը հեշտությամբ կարելի է գտնել՝ օգտվելով բազմապատկման զուգորդական օրենքից.

$13 \cdot (4 \cdot 5) = 13 \cdot 20 = 260$

2) Գտնել $a \cdot (b + c)$ արտահայտության թվային արժեքը, եթե $a=7$, $b=13$, $c=27$: Պարզ է, որ այս դեպքում հեշտ է նախ գտնել b–ի և c–ի արժեքների գումարը, իսկ հետո ստացած արդյունքը բազմապատկել a–ի արժեքով՝ 7–ով.

$a \cdot (b + c) = 7 \cdot (13 + 27) = 7 \cdot 40 = 280$

3) Գտնել $a \cdot (b + c)$ արտահայտության արժեքը, եթե $a = 5$, $b = 14$, $c = 8$: Այս դեպքում հարմար է օգտվել $a \cdot (b + c) = ab + ac$ օրենքի աջ մասից.

$a \cdot (b + c) = 5 \cdot (14 + 8) = 5 \cdot 14 + 5 \cdot 8 = 70 + 40 = 110$

Բացառված չէ, որ որոշ աշակերտների համար հեշտ կլինի նաև մյուս եղանակը.

$a \cdot (b + c) = 5 \cdot (14 + 8) = 5 \cdot 22 = 110$

Որոշ խնդիրների լուծման ժամանակ կարելի է պահանջել, որ աշակերտները կազմեն նրա լուծման արտահայտությունը: Օրինակ՝ մեկ մարգից հավաքեցին 140 կգ, մյուսից՝ 160 կգ վարունգ: Հավաքած վարունգը տեղավորեցին արկղերում, յուրաքանչյուրում՝ 12 կգ: Քանի՞ արկղ պահանջվեց:

Խնդրի լուծումը աշակերտները կարող են գրառել.

$(140 + 160) \cdot 12 = 300 : 12 = 25$

Այդպիսի խնդիրների լուծման ժամանակ պետք է ուշադրություն դարձնել այն հանգամանքին, որ գումարելիներն առանձին–առանձին տրված թվի վրա չեն բաժանվում, իսկ գումարը բաժանվում է:

Նույն խնդրում, եթե յուրաքանչյուր արկղում տեղավորեին 10 կգ, ապա կունենայինք.

$(140 + 160) : 10 = 30$ կամ $140 : 10 + 160 \cdot 10 = 30$

Կարելի է ամփոփել գումարը թվի վրա բաժանելու երկու տարբեր եղանակները:

4–րդ դասարանն ավարտող յուրաքանչյուր աշակերտ պետք է՝

1) ճիշտ հասկանա և օգտագործի «մաթեմատիկական արտահայտություն», «արտահայտության արժեք» տերմինները,

2) ճիշտ գրի ու կարդա ծրագրով նախատեսված մաթեմատիկական արտահայտությունները, կարողանա հաշվել դրանց թվային արժեքները,

3) օգտվելով տառերից՝ գրի թվաբանական գործողությունների հատկությունները,

4) կազմի տրված խնդրի լուծման արտահայտությունը:

§ 4. ՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻԿԱՆ

Հավասարության և հավասարման մասին ոչ բացահայտ կերպով աշակերտների մեջ պատկերացումներ են ձևավորվում դեռ առաջին դասարանում՝ թվարկության ուսուցման ժամանակ, սակայն «հավասարություն», «հավասարում» տերմինները չեն օգտագործվում:

Օրինակ՝ 1–4 թվերի թվարկության ուսուցման ժամանակ աշակերտները, համեմատելով առարկայական հավաքածուների (բազմությունների) տարրերի քանակը (նրանց միջև ստեղծելով փոխմիարժեք համապատասխանություն), կարողանում են ասել, թե ինչ պետք է արվի, որպեսգի բազմությունների տարրերի թիվը հավասարվի (առանց «բազմություն» տերմինի կիրառման)՝ մեկից վերցնելով կամ մյուսին ավելացնելով: Եթե ունենք 4 ափսե և 3 բաժակ, ապա կարելի է նս մեկ բաժակ ավելացնել, որպեսզի բաժակները լինեն այնքան, որքան ափսեները (3+1=4), կամ՝ 4 ափսեներից մեկը վերցնել (պակասեցնել), (4 – 1 = 3): Երկու դեպքում էլ ստացվում է ստույգ թվային հավասարություն:

Թվի կազմության ուսուցման ժամանակ աշակերտները հաճախ են գործ ունենում հավասարությունների և հավասարումների հետ: Օրինակ՝ 7 = 6 + 1, 5 = 4 + 1, 8 = 5 + 3 և այլն:

Որպես անհայտ՝ նախ օգտագործվում է վանդակը:

Օրինակ՝ առաջին դասարանում աշակերտները հանդիպում են 5–□=4, □–1=2 տեսքի գրառումների: Դասվարը պետք է լավ գիտակցի, որ դրանք մեկ փոփոխական պարունակող հավասարումներ են, որոնցում անհայտի արժեքը գտնվում է ընտրման եղանակով՝ ելնելով թվի կազմությունից: Դեռ առաջին դասարանում աշակերտները հանդիպում են նաև երկու վանդակ պարունակող գրառումների: Օրինակ՝ նկարին համապատասխան աշակերտները պետք է վանդակները լրացնեն համապատասխան թվերով:

Նկ. 3

$3 + \square = \square$

$5 - \square = \square$

Պետք է քննարկել վարժություններ, որոնցում տրված է արտահայտության արժեքը, իսկ գործողության նշանն ու բաղադրիչներից մեկը տրված չեն: Օրինակ՝ $7 \otimes \square = 6$, $8 \otimes \square = 5$:

Այս տիպի վարժությունների լուծման համար աշակերտները պետք է կարողանան ճիշտ ընտրել թե՛ համապատասխան թվաբանական գործողության նշանը, թե՛ անհայտի արժեքը (ելնելով թվի կազմությունից):

Նման տիպի վարժությունների հանդիպում ենք նաև հետագայում.

$35 - \square = 34$ $\quad 65 = \square + \square$

$37 = 30 + \square$ $\quad 56 = \square + \square$

Որոշ նախապատրաստական աշխատանք է տարվում հավասարումների լուծման համար: Երեխաները սովորում են գումարման և հանման գործողությունների ստուգման կանոնները.

ա) գումարից հանելով գումարելիներից մեկը՝ ստանում ենք մյուս գումարելին,

բ) տարբերությանը գումարելով հանելին՝ ստանում ենք նվազելին:

Այս կանոններից օգտվելով՝ հետագայում երեխաները պետք է սովորեն անհայտ գումարելին և անհայտ նվազելին գտնելու կանոնները:

Բազմապատկման և բաժանման գործողությունների իմաստը մեկնաբանելուց հետո պետք է քննարկել հետևյալ տիպի վարժություններ.

$$\begin{array}{ll} \underline{2 \cdot 7 = 14} & \underline{7 \cdot 4 = 28} \\ 14 : 2 = 7 & 28 : 7 = 4 \\ 14 : 7 = 2 & 28 : 4 = 7 \end{array}$$ և այլն:

Այս տիպի վարժությունների լուծման միջոցով աշակերտները պետք է հանգեն այն եզրակացության, որ արտադրյալը բաժանելով արտադրիչներից որևէ մեկին՝ ստանում ենք մյուս արտադրիչը: Հետագայում այս կանոնից աշակերտները պետք է օգտվեն անհայտ արտադրիչը գտնելու համար:

Լուծելով $5 + \square = 8$, $\square - 5 = 4$, $3 \cdot \square = 24$ տեսքի որոշ օրինակներ՝ աշակերտներին պետք է նախապատրաստել անհայտ թիվը լատինական այբուբենի որևէ տառով նշանակելուն:

Ուսուցիչը նշում է, որ առաջին օրինակում անհայտ է 2–րդ գումարելին, 2–րդ օրինակում՝ նվազելին, 3–րդ օրինակում՝ երկրորդ արտադրիչը: Նա ասում է, որ մաթեմատիկայում ընդունված է անհայտ թիվը նշանակել տառով: Եթե վանդակները փոխարինենք x տառով, ապա կունենանք.

$$5 + x = 8, \qquad x - 5 = 4, \qquad 3 \cdot x = 24$$

Ուսուցիչը նշում է, որ դրանք հավասարումներ են:

Աշակերտներին պետք է սովորեցնել, որ ճիշտ կարդան հավասարումները: Օրինակ՝ «5 և անհայտ թվի գումարը հավասար է 8–ի» կամ «եթե 5–ին ավելացնենք անհայտ թիվը, կստանանք 8», կամ «5–ին ի՞նչ թիվ պետք է գումարել, որպեսզի ստանանք 8» և այլն: Յուրաքանչյուր աշակերտ պետք է իմանա, որ $5 + x = 8$՝ հավասարում է, որտեղ անհայտը 2–րդ գումարելին: Անհայտ գումարելին գտնելը հենց նշանակում է լուծել հավասարումը: Իսկ անհայտը պետք է գտնել ընտրման եղանակով: Օրինակ՝

1) 5–ին ի՞նչ թիվ գումարենք, որ ստանանք 8:

Ելնելով 8–ի կազմությունից՝ աշակերտները պետք է ասեն, որ $x = 3$: Եթե որոշ աշակերտներ դժվարանում են, ապա կարելի է փորձարկել՝ $x = 2$, $5 + 2 = 7$: 7–ը փոքր է 8–ից, ուրեմն x–ի փոխարեն 2 չի կարելի վերցնել: Քանի որ $7 < 8$, ապա x–ի փոխարեն պետք է վերցնել 2–ից մեծ թիվ: Եթե x–ը փոխարինենք 3–ով, ապա կստանանք $5 + 3 = 8$: Նշանակում է $x = 3$:

2) x – 5 = 4 հավասարման լուծման համար աշակերտները պետք է իմանան 9 թվի կազմությունը՝ եթե 9–ից հանենք 5, կստանանք 4, նշանակում է x = 9:

3) 3 · x = 24 հավասարման լուծման համար աշակերտները պետք է իմանան համապատասխան բազմապատկման դեպքը՝ 3 · 8 = 24: Նշանակում է՝ x = 8:

Աշակերտների մեջ «հավասարում», «հավասարման լուծում» հասկացությունների ամրապնդման նպատակով կարելի է քննարկել հետևյալ բովանդակությամբ վարժություններ.

1) Եթե անհայտ թվին ավելացնենք 4, կստանանք 7: Ինչպե՞ս պետք է գրել: Ի՞նչ հավասարում ստացվեց: Ինչի՞ է հավասար անհայտ թիվը:

2) Երբ մտքումս պահած թվին ավելացնեմ 3, ապա կստանամ 8: Ո՞ր թիվն եմ մտքումս պահել: Ի՞նչ հավասարում ստացանք: Ինչի՞ է հավասար անհայտը:

3) Առաջին գումարելին հավասար է 3–ի, իսկ 2–րդ գումարելին անհայտ է: Ինչի՞ է հավասար անհայտ գումարելին: Գրել հավասարման տեսքով և գտնել անհայտ գումարելին, եթե գումարը 7 է:

4) Մտքումս պահած թիվը բազմապատկել եմ 5–ով և ստացել 20: Ի՞նչ թիվ էի պահել մտքումս: Գրել հավասարումը և գտնել անհայտը:

Հավասարումների լուծումը նախապատրաստելու ժամանակաշրջանում պարզագույն տեսքի հավանարումները կարող են լուծվել բանավոր, իսկ հետագայում՝ գրավոր:

Անհայտ թիվը որևէ տառով նշանակելուց հետո I–IV դասարանների աշակերտները պետք է լավ հասկանան, որ մաթեմատիկական արտահայտություններում տրված տառերը կարող են ընդունել ցանկացած, իսկ հավասարումներում՝ միայն, որոշակի արժեք:

Հաջորդ փուլում աշակերտները հավասարումները պետք է լուծեն՝ ելնելով թվաբանական գործողությունների բաղադրիչների և արդյունքի միջև եղած կապից: Նրանք պետք է հասկանան, որ հավասարումը այնպիսի հավասարություն է, որը պարունակում է տառով նշանակված անհայտ թիվ:

Հավասարումների լուծման համար աշակերտները պետք է լավ իմանան անհայտ գումարելին, անհայտ նվազելին, անհայտ հանելին, անհայտ արտադրիչը, անհայտ բաժանելին, անհայտ բաժանարարը գտնելու կանոնները:

Հետագայում աշակերտները հավասարումների լուծումը կատարում են գրավոր: Օրինակ՝ 5 + x = 9 հավասարումը լուծելու համար աշակերտները պետք է գիտակցեն. անհայտ է 2–րդ գումարելին, որը գտնելու համար գումարից պետք է հանել հայտնի գումարելին: Գրատախտակին և տետրերում գրվում է.

$$\begin{aligned} 5 + x &= 9 \\ x &= 9 - 5 \\ \underline{x} &\underline{{}= 4} \\ 5 + 4 &= 9 \end{aligned}$$

x – 3 = 5 տեսքի հավասարումները լուծելիս աշակերտները պետք է իմանան. անհայտ է նվազելին, որը գտնելու համար տարբերությանը պետք է գումարել հանելին.

$$\begin{aligned} x - 3 &= 5 \\ x &= 5 + 3 \\ \underline{x} &\underline{{}= 8} \\ 8 - 3 &= 5 \end{aligned}$$

Նման դատողություններ կատարելով՝ պետք է լուծել այլ տեսքի հավասարումներ:

Հաշվի առնելով այն հանգամանքը, որ որոշ դպրոցներում դասվար են աշխատում ոչ մասնագետները, նպատակահարմար ենք համարում մեկնաբանել տարբեր դասարաններում լուծվող հավասարումների տիպերից մեկական օրինակ:

7 – x = 3 տեսքի հավասարումը լուծելու համար աշակերտները պետք է իմանան, որ անհայտ հանելին գտնելու համար պետք է նվազելիից հանել տարբերությունը.

$$\begin{aligned} 7 - x &= 3 \\ x &= 7 - 3 \\ \underline{x} &\underline{{}= 4} \\ 7 - 4 &= 3 \end{aligned}$$

x · 5 = 15 տեսքի հավասարումների լուծման համար պետք է իմանալ, որ անհայտ արտադրիչը գտնելու համար արտադրյալը պետք է բաժանել հայտնի արտադրիչին.

$$\begin{aligned} x\ \ 5 &= 15 \\ x &= 15 : 5 \\ \underline{x} &\underline{{}= 3} \\ 5\ \ 3 &= 15 \end{aligned}$$

12 : x = 4 տեսքի հավասարումների լուծման համար պետք է իմանալ, որ անհայտ բաժանարարը գտնելու համար պետք է բաժանելին բաժանել քանորդին.

$$12 : x = 4$$
$$x = 12 : 4$$
$$\frac{x = 3}{12 : 3 = 4}$$

$x : 4 = 5$ տեսքի հավասարումների լուծման համար պետք է իմանալ, որ անհայտ բաժանելին գտնելու համար բավական է բաժանարարը բազմապատկել քանորդով.

$$x : 4 = 5$$
$$x = 4 \cdot 5$$
$$\frac{x = 20}{20 : 4 = 5}$$

Պարզագույն տեսքի հավասարումներից բացի՝ կարելի է քննարկել այնպիսի հավասարումներ, որոնցում բաղադրիչներից մեկը ներկայացված է արտահայտության տեսքով: Օրինակ՝

$$x + (21 + 15) = 58$$

Մեկնաբանվում է, որ այս տիպի հավասարումները լուծելու համար նախ պետք է գտնել փակագծերում տրված արտահայտության արժեքը, իսկ հետո, օգտվելով թվաբանական գործողության արդյունքի և բաղադրիչների միջև եղած կապից, գտնել x–ը:

$$x + 36 = 58$$
$$x = 58 - 36$$
$$\frac{x = 22}{22 + (21 + 15) = 58}$$

Հատկապես ուշադրություն պետք է դարձնել լուծված հավասարումների ստուգմանը: Յուրաքանչյուր երեխա պետք է հասկանա, թե ինչպես պետք է ստուգել լուծված հավասարումը, և ի՞նչ նպատակ է դա հետապնդում:

Նպատակահարմար է քննարկել նաև այնպիսի հավասարումների լուծումները, որոնք կատարվում են զուտ տրամաբանական դատողությունների միջոցով: Քննարկենք օրինակներ.

1) $214 \cdot x = 214$

Աշակերտներն իմանալով, որ $a \cdot 1 = a$՝ ցանկացած a–ի դեպքում, ասում են, որ $x = 1$:

2) $153 + x = 121 + 153$

Այստեղ աշակերտները պետք է իմանան, որ եթե հավասար թվերին գումարենք հավասար թվեր, ապա նորից կստանանք հավասար թվեր (այլ կերպ՝ հավասարության երկու մասին ավելացնելով միևնույն թիվը, հավասարությունը չի փոխվի): Քանի որ հավասարման աջ և ձախ մասերում կա 153 թիվը, նշանակում է $x = 121$:

3) $324 - x = 324$

Իմանալով, որ $a - 0 = a$՝ a–ի ցանկացած արժեքի դեպքում, երեխաները պետք է անմիջապես ասեն, որ $x = 0$:

Հաճախ աշակերտները շփոթվում են, որոշ դեպքերում էլ չեն կարողանում լուծել այնպիսի հավասարումներ, որոնցում անհայտը գտնվում է հավասարության աջ մասում: Օրինակ՝

$$24 = 15 - x, \qquad 15 = x - 2, \qquad 144 = 12 \cdot x$$

և այլն: Նպատակահարմար է քննարկել այդպիսի հավասարումների լուծումը: Որոշ աշակերտներ հաճախ դժվարանում են լուծել այնպիսի հավասարումներ, որոնք պարունակում են բազմանիշ թվեր: Այդպիսի դեպքում պետք է օգտվել, այսպես կոչված, «օգնական» օրինակից:

Օրինակ՝ $1978 - x = 1243$ հավասարման լուծման համար կարելի է որպես «օգնական» օրինակ դիտարկել $5 - x = 2$ հավասարումը ու վերհիշել, թե ինչպես պետք է գտնել անհայտ հանելին:

Տարրական դպրոցում պետք է ուշադրություն դարձնել հավասարում կազմելու միջոցով խնդիրների լուծման վրա: Օրինակ՝ խանութ բերեցին խնձորով լցված որոշ թվով արկղեր: Առաջին օրը վաճառեցին 27 արկղ խնձոր, որից հետո խանութում մնաց 21 արկղ խնձոր: Քանի՞ արկղ խնձոր էին բերել խանութ:

Երեխաները պետք է դատեն այսպես.

Խանութ բերված արկղերի թիվը մեզ հայտնի չէ, այն նշանակենք x–ով: Քանի որ առաջին օրը վաճառել էին բերված արկղերից 27–ը, ապա արկղերի թիվը պակասել է 27–ով, իսկ քանի որ խնդրում ասված է, թե խանութում մնացել է 21 արկղ խնձոր, ուրեմն՝

$$x - 27 = 21$$
$$x = 21 + 27$$
$$x = 48$$

Պատասխան՝ 48 արկղ:

Չնայած որոշ մեթոդիստներ չեն երաշխավորում տարրական դպրոցում այնպիսի հավասարումների ուսուցումը, որոնց լուծման համար երկու անգամ պետք է օգտվել թվաբանական գործողությունների բաղադրիչների ու արդյունքի միջև եղած կապից (որն ավելի է զարգացնում աշակերտների տրամաբանական մտածողությունը), այնուամենայնիվ, լավ կլինի, որ դասվարը որոշ դեպքերում քննարկի դրանց լուծումը:

Օրինակ՝ լուծել հավասարումը.

$$(x + 34) + 15 = 84$$

Մեկնաբանվում է, որ անհայտ է առաջին գումարելին, որն իրենից ներկայացնում է անհայտ թվի և 34-ի գումարը: Այն գտնելու համար գումարից պետք է հանել հայտնի գումարելին.

$$x + 34 = 84 - 15$$
$$x + 34 = 69$$

Նորից անհայտ է առաջին գումարելին, որը գտնելու համար պետք է 69-ից հանել 34.

$$x = 69 - 34$$
$$x = 35$$
$$\frac{(35 + 34) + 15 = 84}{69 + 15 = 84}$$

Այսպիսով, 4-րդ դասարանն ավարտող յուրաքանչյուր աշակերտ պետք է կարողանա՝

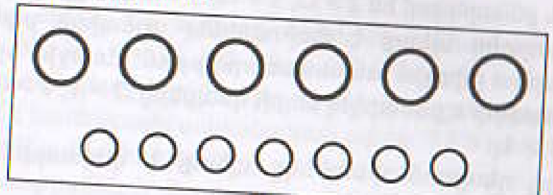
1) տարբերել հավասարությունը հավասարումից,
2) ճիշտ կարդալ տրված հավասարումը,
3) օգտվելով թվաբանական գործողությունների բաղադրիչների և արդյունքների միջև եղած կապից՝ լուծել պարզագույն տեսքի հավասարումներ,
4) ստուգել լուծված հավասարումը,
5) հարկ եղած դեպքում խնդիրը լուծել հավասարում կազմելու միջոցով:

§ 5. ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻԿԱՆ

Դեռ առաջին դասարանում առարկայական բազմությունների համեմատման միջոցով ներմուծվում են «մեծ է», «փոքր է», «նույնքան է» հասկացությունները: Այդ աշխատանքը կարելի է կազմակերպել հետևյալ կերպ. գրատախտակի մոտ կանչել 3 տղա և 3 աղջիկ ու կազմել զույգեր (մեկ տղա և մեկ աղջիկ): Հարց առաջարկել՝ տղանե՞րն են շատ, թե՞ աղջիկները, աղջիկնե՞րն են շատ, թե՞ տղաները: Աշակերտները պատասխանում են, որ տղաներն այնքան են, ինչքան աղջիկները, աղջիկներն այնքան են, ինչքան տղաները:

Այնուհետև կարելի է գրատախտակի մոտ կանչել ևս մեկ տղայի ու առաջարկել նույն հարցերը: Ընդհանրացնելով՝ ուսուցիչն ասում է, որ տղաներն ավելի շատ են, քան աղջիկները, տղաները 4-ն են, իսկ աղջիկները՝ 3-ը, ուրեմն՝ 4-ը մեծ է 3-ից, 3-ը փոքր է 4-ից:

Պետք է հաշվի առնել, որ երեխաներն ավելի շատ են օգտվում առարկայական բազմությունների տարրերի քանակի համեմատման, այսպես կոչված՝ «աչքաչափի» եղանակից: Օրինակ՝ ցուցադրելով 6 մեծ շրջաններ և 7 փոքր շրջաններ՝



Նկ 4

աշակերտներից ոմանք կարող են ասել, որ փոքր շրջաններն ավելի քիչ են, քան մեծերը: Յուրաքանչյուր դասվար այդպիսի աշխատանքները կատարելիս պետք է լավ գիտակցի, որ փաստորեն երկու վերջավոր բազմությունների տարրերի միջև փոխմիարժեք համապատասխանություն ստեղծելով պարզվում է, թե որի տարրերի քանակն է ավելի շատ, որինը՝ քիչ: Համեմատելով տարրերի քանակն արտահայտող թվերը՝ իմանում ենք, թե որ բազմությունն է ավելի շատ տարրեր պարունակում, այդ թվերից որն է մեծ, իսկ որը՝ փոքր.

$$m(A) = \alpha,\ m(B) = \beta,\ \alpha = \beta,\ \alpha > \beta,\ \alpha < \beta$$

Հետագայում աշակերտները պետք է կարողանան համեմատել թվերը՝ ելնելով նրանց միջև եղած քանակական առնչությունից (յուրաքանչյուր հաջորդ թիվ մեկով մեծ է իրեն անմիջապես նախորդողից, իսկ յուրաքանչյուր նախորդ թիվ մեկ միավորով փոքր է իրեն անմիջապես հաջորդողից): Աշակերտները պետք է հասկանան, որ բնական թվերի հաջորդականությունում մեծ է այն թիվը, որը հաշվելիս անվանվում է ավելի ուշ, յուրաքանչյուր բնական թիվ մեծ է իրեն նախորդող յուրաքանչյուր թվից:

Առաջին դասարանում աշակերտները ծանոթանում են «>», «<» պայմանանշաններին:

Այդ աշխատանքը կարելի է կազմակերպել հետևյալ կերպ. հավաքման պաստառի վրա դնել 6 կարմիր և 5 կանաչ գույնի շրջաններ: Կարմիր շրջանների կողքին դրվում է 6 թվանշանով քարտը, իսկ կանաչների կողքին՝ 5 թվանշանով քարտ:

Ուսուցիչը հարցնում է՝ կարմի՞ր շրջաններն են շատ, թե՞ կանաչ: Աշակերտները պատասխանում են, որ կարմիր շրջաններն ավելի շատ են: Ուսուցիչն ընդհանրացնում է ու ասում. «Որեմն՝ 6–ը մեծ է 5–ից, որը կարող ենք գրել՝ $6 > 5$, իսկ $5 < 6$»:

Պետք է ցույց տալ, թե ինչպես են գրվում այդ նշանները:

Այնուհետև քննարկվում են $2 > \square$, $5 > \square$, $8 < \square$ տեսքի վարժությունները, որոնցում վանդակը պետք է փոխարինել այնպիսի թվով, որպեսզի ստացվի ճշմարիտ թվային անհավասարություն: Առաջին երկու դեպքում նպատակահարմար է քննարկել բոլոր դեպքերը՝ $2 > 1$, $2 > 0$, $5 > 0$, $5 > 1$, $5 > 2$, $5 > 3$, $5 > 4$:

Իսկ 3–րդ դեպքում վանդակը պետք է փոխարինել 8–ից մեծ ցանկացած թվով՝ $8 < 10$, $8 < 11$ և այլն:

Հետագայում 1–4–րդ դասարանների աշակերտները պետք է սովորեն համեմատել թվերն ու թվային արտահայտությունները և դնել «>», «<» նշաններից համապատասխանը: Օրինակ՝ $16 \otimes 20$ վարժության լուծման համար աշակերտները պետք է ելնեն թվային հաջորդականությունում այդ թվերի գրաված տեղից՝ հաշվելիս 16–ը անվանվում է ավելի շուտ, ուրեմն $16 < 20$: Թվային արտահայտությունները համեմատելիս պետք է հաշվել դրանց արժեքները և արդյունքները համեմատել: Օրինակ՝ $40 + 20 \otimes 70$: Քանի որ $40 + 20 = 60$, ապա $60 < 70$: Երեխաները կարող են դատել՝ 60–ը 6 տասնյակ է, 70–ը՝ 7 տասնյակ, իսկ 6 տասնյակը փոքր է 7 տասնյակից: Կարելի է ասել, որ հաշվելիս 60–ը անվանվում է ավելի շուտ, ուրեմն՝ $60 < 70$:

Հետագայում աշակերտները սովորում են համեմատել երկու թվային արտահայտություններ կա՛մ դրանց արժեքները հաշվելով և արդյունքները համեմատելով, կա՛մ էլ տրամաբանական դատողությունների միջոցով: Օրինակ՝

$$15 - 9 \otimes 15 - 10$$

$6 > 5$ կամ՝

նվազելիները նույնն են, ձախ մասի հանելին մեկ միավորով փոքր է աջ մասի հանելիից ($9 < 10$), հետևապես, ձախ մասի տարբերությունը ավելի մեծ է աջ մասի տարբերությունից՝

$$15 - 9 > 15 - 10$$

Բազմապատկման և բաժանման գործողությունների հետ ծանոթանալուց հետո պետք է քննարկել նաև այնպիսի վարժություններ, որոնք պարունակում են արտադրյալներ, քանորդներ: Օրինակ՝

$$6 \cdot 4 \otimes 6 \cdot 3,\ 7 - 7 \otimes 7 \cdot 3,\ 15 : 3 \otimes 15 \cdot 5 \text{ և այլն:}$$

Կրկնելով, ամփոփելով անհավասարության հասկացությունը՝ ուսուցիչը գրատախտակին գրում է՝ $15 + 3 = 6 \cdot 3$, $3 \cdot 5 = 2 \cdot 5 + 5$ և ասում,

որ սրանք հավասարություններ են, իսկ $4 \cdot 1 < 4 + 1$, $50 - 5 > 50 - 7$ գրառումները անհավասարություններ են:

Հետագայում հաճախակի օգտագործվում է «անհավասարություն» տերմինը:

Օրինակ՝ ճի՞շտ են արդյոք հետևյալ անհավասարությունները՝ $35 - (5 + 7) < 30$, $36 : 4 < 36$, $(40 + 8) - 7 > 40$ և այլն:

Հետագայում պետք է քննարկել այնպիսի վարժություններ, որոնցում պահանջվում է համեմատել անվանական թվերը՝ 7 մ 8 դմ $\otimes$ 78 դմ, 6 դմ 5սմ $\otimes$ 7 դմ և այլն: Այդ վարժությունների լուծման համար աշակերտները պետք է իմանան մեծությունների միավորների միջև եղած առնչությունները:

Հետագայում արտահայտությունները համեմատելու ուղղությամբ կատարվող աշխատանքը շարունակվում է:

Տարրական դասարաններում պետք է ուսուցվեն անհավասարումներ, որոնց լուծումը կատարվում է անհայտի արժեքի ընտրման ու փորձարկման եղանակով:

Օրինակ՝ $x < 5$:

Այս անհավասարման լուծման համար աշակերտները պետք է ընտրեն 5–ից փոքր ցանկացած թիվ: Սակայն լավ կլինի, որ նրանք թվարկեն՝ 0, 1, 2, 3, 4: Եթե պետք է գրվի, թե x–ը ինչի է հավասար, ապա պետք է գրվի՝ $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$:

$7 < x$ տեսքի անհավասարումների լուծման համար աշակերտները պետք է հասկանան, որ x–ը պետք է մեծ լինի 7–ից, ուրեմն՝ x–ը կարող է լինել 7–ից մեծ ցանկացած թիվ՝ 8, 9... Հաճախ հանդիպում ենք այնպիսի օրինակների, որոնցում տրված է անհավասարումը և անհայտի արժեքների բազմությունը և պահանջվում է այդ բազմությունից ընտրել անհայտի այն արժեքները, որոնց համար ստույգ է տրված անհավասարումը: Օրինակ՝ պարզել, թե k–ի՝ 1, 2, 3, 4, 7, 8 թվերից ո՞ր արժեքները ստանալու դեպքում է $k < 5$ անհավասարումը ստույգ: Փորձարկման եղանակով պարզվում է, որ k–ն կարող է ընդունել 1, 2, 3, 4 արժեքները: Փաստորեն, երեխան անհայտի արժեքների բազմությունից անջատում է անհավասարման լուծումների բազմությունը:

Թեմայի ուսուցման արդյունքում աշակերտները պետք է կարողանան տարբերել անհավասարությունը հավասարությունից, հավասարումը՝ անհավասարումից, համեմատել արտահայտությունները և ճիշտ դնել «>», «<» նշանները, լուծել պարզագույն տեսքի անհավասարումներ:

ԳԼՈՒԽ ԵՐԿՐՈՐԴ

ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՆՅՈՒԹԻ ՈՒՍՈՒՑՈՒՄԸ

§ 1. ՄԵԹՈԴԱՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

Նպատակահարմար ենք գտնում համառոտ ներկայացնել տարրական դպրոցում ուսուցվող երկրաչափական նյութին առնչվող հասկացությունների տեսական մեկնաբանությունները:

Հասկացությունը մտածելու այնպիսի ձև է, որն արտահայտում է ուսումնասիրվող օբյեկտների էական հատկությունները: Յուրաքանչյուր հասկացություն ունի իր ծավալը և բովանդակությունը:

Հասկացության ծավալը օբյեկտների բազմություն է, որի տարրերի նկատմամբ կիրառելի է տվյալ հասկացությունը:

Հասկացության բովանդակությունը տվյալ հասկացության էական հատկանիշների, հատկությունների բազմությունն է:

Հասկացության սահմանումը տրամաբանական գործողություն է, որի ընթացքում բացահայտվում է հասկացության բովանդակությունը: Կարելի է ասել, որ սահմանումը նախադասություն է, որը մեկնաբանում է նոր հասկացության էությունը, իմաստը:

Ընդհանրապես, ցանկացած հասկացություն սահմանելու համար օգտվում ենք ավելի պարզ, հայտնի հասկացություններից: Սակայն բոլոր հասկացությունները սահմանել հնարավոր չէ, ուստի նրանց մի մասն ընդունվում է առանց սահմանման: Սահմանել որևէ հասկացություն՝ նշանակում է բացատրել, թե ինչ է այն: Օրինակ՝ ուղիղները կոչվում են զուգահեռ, եթե չեն հատվում: Երկրաչափությունում որպես նախնական (չսահմանվող) հասկացություններ ընդունում են կետը, ուղիղը, հարթությունը, կետերի բազմությունը:

Երկրաչափությունը՝ որպես գիտություն, ծագել է շատ հին ժամանակներից և հիմնականում կապված է եղել հողերի չափման հետ: Եթե «Երկրաչափությունը» բառացիորեն թարգմանվի, ապա կստացվի «հողաչափություն»:

Երկրաչափությունը գիտություն է երկրաչափական պատկերների հատկությունների մասին: Իսկ երկրաչափական պատկերը կետերի ցանկացած բազմություն է:

Դպրոցում ուսուցվող երկրաչափությունը կոչվում է էվկլիդեսյան (հույն գիտնական Էվկլիդեսի անունով, III դար մ.թ.ա.): Այն բաժանվում է երկու հիմնական մասի՝ հարթաչափության և տարածաչափության: Հարթաչափությունը երկրաչափության այն բաժինն է, որն ուսումնասիրում է հարթության վրա գտնվող պատկերները, իսկ տարածաչափությունը երկրաչափության այն բաժինն է, որն ուսումնասիրում է տարածության մեջ գտնվող պատկերները (մարմինները): Դրանց մեջ կարող են լինել ոչ հարթ պատկերներ, օրինակ՝ խորանարդ, քառանիստ (եռանկյուն բուրգ), ուղղանկյունանիստ, գլան, կոն, գունդ, որոնց մասին պետք է պատկերացումներ ձևավորել տարրական դպրոցում: Դա աշակերտներին հնարավորություն կտա հասկանալ բնության և մարդկանց կողմից ստեղծվող իրական առարկաների որոշ հատկությունները:

Նախնական կամ չսահմանվող հասկացություններն ընտրելուց հետո նրանց միջոցով ձևակերպվում են աքսիոմները, որոնք ընդունվում են առանց ապացուցման: Աքսիոմ բառը ծագել է հունարեն «աքսիոս» բառից և նշանակում է պնդում, որը կասկած չի հարուցում: Օրինակ՝ ցանկացած երկու կետով անցնում է մեկ և միայն մեկ ուղիղ: Մաթեմատիկական այն առաջադրանքը, որն ապացուցվում է, կոչվում է թեորեմ:

Թեորեմի ձևակերպումը հիմնականում կազմված է լինում երկու մասից՝ պայմանից և եզրակացությունից: Պայմանում ասվում է, թե ինչ է տրված, իսկ եզրակացությունում՝ ինչ պետք է ապացուցել: Օրինակ՝ կից անկյունների գումարը հավասար է 180^0–ի: Այս թեորեմի պայմանն այն է, որ տրված են կից անկյուններ: Թեորեմի եզրակացությունն այն է, որ նրանց գումարը հավասար է 180^0–ի:

Այժմ համառոտ անդրադառնանք երկրաչափական այն հասկացություններին, որոնք ոչ բացահայտ կերպով ուսուցվում են տարրական դասարաններում:

Առում են, որ C կետը գտնվում է A և B կետերի միջև, եթե նրանք իրարից տարբեր կետեր են և AC + CB = AB (նկ. 5):

Նկ. 5

Հատված: AB հատված է կոչվում ուղղի կետերի այն բազմությունը, որը կազմված է A, B և նրանց միջև գտնվող կետերից: A և B կետերը կոչվում են AB հատվածի ծայրակետեր:

Այլ կերպ. **Ուղղի մի մասը, որը սահմանափակված է երկու կետերով, կոչվում է հատված:**

Ճառագայթ: Կիսաուղիղ կամ ճառագայթ կոչվում է ուղղի այն մասը, որը բաղկացած է նրա տրված կետի մի կողմում գտնվող բոլոր կետերից:

Նկ. 5ա

O կետը a ուղիղը տրոհում է երկու մասի՝ ճառագայթի:

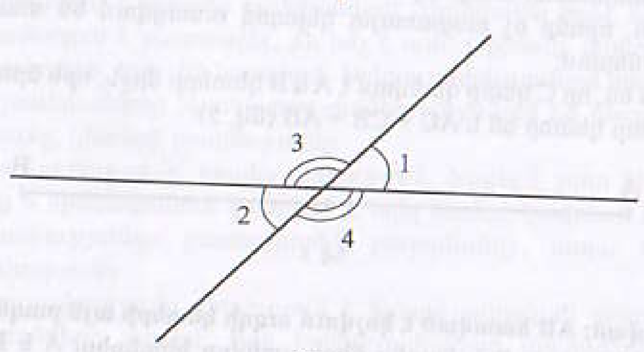
O կետը կոչվում է կիսաուղղի սկզբնակետ:

Անկյուն: Միևնույն կետից տարած երկու ճառագայթներ հարթությունը բաժանում են երկու տիրույթի: Այդ տիրույթներից մեկը երկու ճառագայթների հետ միասին կազմում է մի պատկեր, որն անվանում են անկյուն: Այդ ճառագայթները կոչվում են անկյան կողմեր, իսկ այն կետը, որով տարված են ճառագայթները՝ անկյան գագաթ:

Անկյունը կոչվում է փռված, եթե նրա կողմերը կազմում են ուղիղ գիծ: **Անկյունը կոչվում է ուղիղ,** եթե հավասար է փռված անկյան կեսին (90°–ի):

90°–ից փոքր անկյունը կոչվում է սուր անկյուն: 90°–ից մեծ և 180°–ից փոքր անկյունը կոչվում է բութ անկյուն:

Երկու անկյուններ կոչվում են հակադիր, եթե մի անկյան կողմերը մյուս անկյան կողմերի լրացուցիչ կիսաուղիղներն են (նկ. 6):



Նկ. 6

∠1–ը և ∠2–ը հակադիր են:

∠3–ը և ∠4–ը հակադիր են:

∠1–ը և ∠3–ը կից են:

∠2–ը և ∠3–ը, ∠2–ը և ∠4–ը, ∠4–ը և ∠1–ը ևս կից են:

Հակադիր անկյունները հավասար են:

Կից անկյունների գումարը հավասար է 180°–ի:

Բեկյալ գիծ կոչվում է հատվածների այն հաջորդականությունը, որոնք չեն գտնվում միևնույն ուղղի վրա և դասավորված են այնպես, որ հաջորդի սկզբնակետը համընկնում է նախորդի վերջնակետին:

Բացառություն կարող է կազմել վերջին հատվածը, որի վերջնակետը կարող է համընկնել առաջինի սկզբնակետին: Այդ դեպքում բեկյալը կոչվում է փակ: Բեկյալը կազմող հատվածները կոչվում են նրա կողմերը, իսկ երկու հաջորդական հատվածներով կազմված անկյունների գագաթները՝ բեկյալի գագաթներ: Բեկյալի պարագիծ կոչվում է նրա բոլոր կողմերի երկարությունների գումարը: Բեկյալ գիծը կոչվում է ուռուցիկ, եթե գտնվում է իր ցանկացած կողմի շարունակության մի կողմում:

Փակ բեկյալ գիծը նրանով սահմանափակված հարթության մասի հետ կոչվում է բազմանկյուն: Եթե բազմանկյունն ունի երեք կողմ, ապա կոչվում է եռանկյուն: Կարելի է սահմանել այլ կերպ. **Եռանկյուն կոչվում է այն պատկերը, որը կազմված է միևնույն ուղղի վրա չգտնվող երեք կետերից և այդ կետերը զույգ առ զույգ միացնող երեք հատվածներից:** Կետերը կոչվում են եռանկյան գագաթներ, իսկ հատվածները՝ նրա կողմերը:

Եռանկյունը կոչվում է հավասարասրուն, եթե երկու կողմերի երկարությունները հավասար են: Երկու հավասար կողմերը կոչվում են սրունքներ, իսկ երրորդ կողմը՝ եռանկյան հիմք:

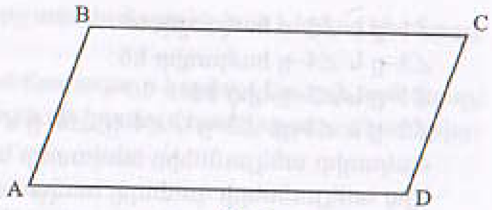
Եթե եռանկյան երեք կողմերի երկարությունները հավասար են, ապա եռանկյունը կոչվում է հավասարակողմ: Ցանկացած եռանկյան անկյուններից գոնե երկուսը սուր են: **Եթե եռանկյան անկյուններից մեկն ուղիղ է, ապա այն կոչվում է ուղղանկյուն եռանկյուն: Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան դիմացի կողմը կոչվում է ներքնաձիգ, մյուս երկու կողմերը կոչվում են էջեր:**

Եռանկյան ներքին անկյունների գումարը հավասար է 180°:

Եթե բազմանկյունն ունի 4 կողմ, ապա այն կոչվում է քառանկյուն:

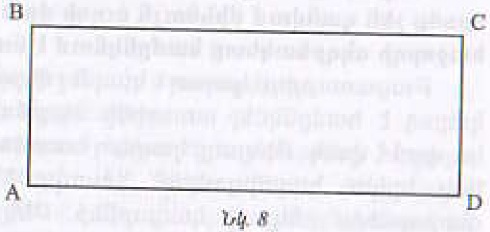
Եթե քառանկյան հանդիպակաց կողմերը զույգ առ զույգ զուգահեռ են, ապա այն կոչվում է զուգահեռագիծ (նկ. 7):

$AB \parallel CD \quad BC \parallel AD$



Նկ. 7

Զուգահեռագծի հանդիպակաց կողմերի երկարությունները հավասար են, հանդիպակաց անկյունները հավասար են:

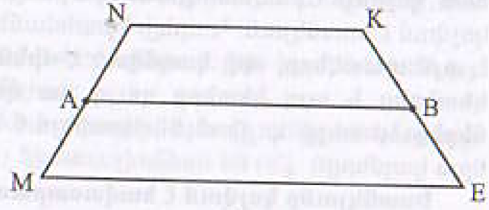


Նկ. 8

Ուղղանկյունը մի քառանկյուն է, որի բոլոր անկյունները ուղիղ են: Կամ՝ այն զուգահեռագիծը, որի բոլոր անկյունները ուղիղ են, կոչվում է **ուղղանկյուն (նկ. 8):**

Այն զուգահեռագիծը, որի բոլոր կողմերի երկարությունները հավասար են, կոչվում է **շեղանկյուն:**

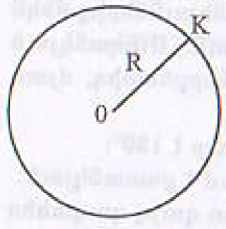
Այն ուղղանկյունը, որի բոլոր կողմերի երկարությունները հավասար են, կոչվում է **քառակուսի:**



Նկ. 9

Սեղան կոչվում է այն քառանկյունը, որի միայն երկու հանդիպակաց կողմերն են զուգահեռ (նկ.9):

Զուգահեռ կողմերը կոչվում են սեղանի հիմքեր, իսկ մյուս երկու կողմերը՝ սրունքներ: Եթե սրունքները հավասար են, ապա սեղանը կոչվում է հավասարասրուն: Սրունքների միջնակետերը միացնող հատվածը կոչվում է **սեղանի միջին գիծ** (AB):

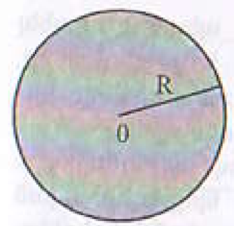


Նկ. 10

Շրջանագիծ կոչվում է այն պատկերը, որը բաղկացած է հարթության այն բոլոր կետերից, որոնք հավասարահեռ են այդ հարթությանը պատկանող տրված կետից: Այդ կետը կոչվում է շրջանագծի կենտրոն (նկ.10):

Այն հատվածը, որը միացնում է շրջանագծի որևէ կետ կենտրոնի հետ, կոչվում է նրա շառավիղ:

Շրջանագծի երկու կետերը միացնող հատվածը, կոչվում է լար, իսկ կենտրոնով անցնող լարը կոչվում է տրամագիծ:

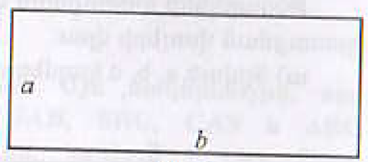


Նկ. 11

Շրջան կոչվում է հարթության այն բոլոր կետերից բաղկացած պատկերը, որոնք գտնվում են այդ հարթությանը պատկանող տրված կետից տրված հեռավորությունից ոչ մեծ հեռավորության վրա (նկ. 11)

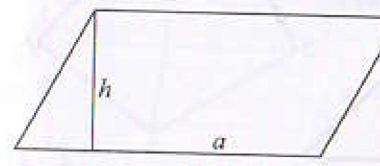
Մակերեսները չափելու համար որպես չափման միավոր ընդունվում է այն քառակուսու մակերեսը, որի կողմի երկարությունը հավասար է երկարության միավորի: **Ուղղանկյան մակերեսը** հավասար է նրա կից կողմերի երկարությունների արտադրյալին.

$S = a \cdot b$



Նկ. 12

Զուգահեռագծի մակերեսը հավասար է նրա կողմի և այդ կողմին տարված բարձրության արտադրյալին:



Նկ. 13

$S = a \cdot h$

Եռանկյան մակերեսը հավասար է նրա կողմի և այդ կողմին տարված բարձրության արտադրյալի կեսին:

$S = \frac{1}{2} a \cdot h$

Նկ. 14

Սեղանի մակերեսը հավասար է նրա հիմքերի կիսագումարի և բարձրության արտադրյալին:

$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$

Նկ. 15

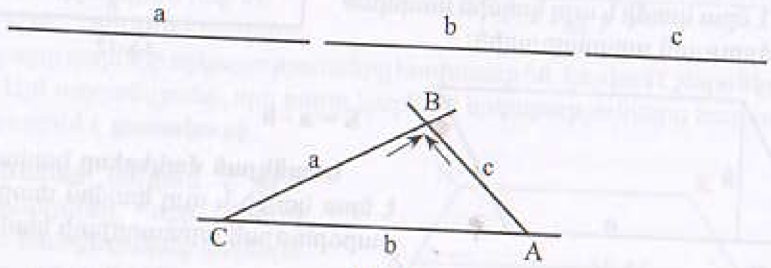
Շրջանի մակերեսը հաշվվում է $S = \pi R^2$ բանաձևով, որտեղ R–ը շրջանի շառավիղն է, իսկ $\pi = 3,14...$ հաստատուն թիվն է:

Բազմանկյան մակերեսը հաշվելու համար այն պետք է տրոհել եռանկյունների, քառանկյունների, որոնց մակերեսը հաշվել գիտենք, հաշվել ստացված պատկերների մակերեսներն ու արդյունքները գումարել: Մակերեսները կարելի է չափել նաև պալետի օգնությամբ:

Կան խնդիրներ, որ պահանջում են, օգտվելով տվյալներից և գծագրական գործիքներից, կառուցել այս կամ այն երկրաչափական պատկերը: Այդպիսի խնդիրներն անվանում են **կառուցման խնդիրներ**: Օրինակ՝ քանոնի միջոցով կարելի է կառուցել տրված երկարության հատված, կարկինի միջոցով՝ տրված շառավղով շրջանագիծ և այլն:

Քննարկենք կառուցման երկու խնդիր՝ մանրամասն կանգ չառնելով կառուցման փուլերի վրա:

ա) Տրված a, b, c կողմերով կառուցել եռանկյուն (նկ. 16):

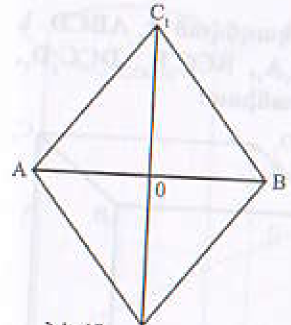


Նկ. 16

Կամայական ուղղի վրա վերցնում ենք A կետը:

Կարկինին տալիս ենք b–ի չափ բացվածք ու, սուր ծայրը դնելով A կետում, մյուս ծայրով այդ ուղղի վրա նշում ենք C կետը:

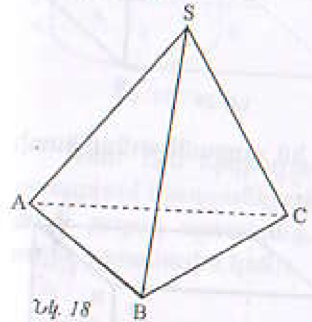
Այնուհետև կարկինին տալով c բացվածք՝ A կետից, որպես կենտրոնից, շրջանագիծ ենք գծում: C կետից a շառավղով աղեղ ենք գծում, որը հատվում է A կենտրոնով և c շառավղով տարված շրջանագծի հետ B կետում: Միացնելով A, B, C կետերը՝ ստանում ենք ABC եռանկյունը, որի կողմերի երկարությունները համապատասխանաբար հավասար են a–ի, b–ի, c–ի: Այդպիսի եռանկյուն կստացվի նաև CA–ի հակառակ կողմում:



Նկ. 17

բ) Կիսել տրված հատվածը (նկ. 17):

Ենթադրվում է կիսել AB հատվածը: A և B կետերից AB շառավղով գծում ենք շրջանագծեր, որոնք հատվում են C և C_1 կետերում: Միացնելով C և C_1 կետերը՝ կստանանք CC_1 հատվածը, որը հատվելով AB հատվածի հետ՝ այն կիսում է հավասար մասերի:



Նկ. 18

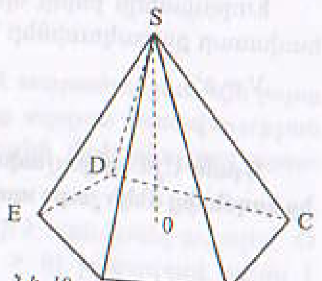
Քառանիստ: Այն մակերևույթը, որը կազմված է SAB, SBC, CAS և ABC եռանկյուններից, կոչվում է քառանիստ (եռանկյուն բուրգ):

Կարդացվում է քառանիստ SABC:

Բուրգ: Բազմանիստը, որը կազմված է n–անկյուն (գծագրում՝ հնգանկյուն) բազմանկյունից և n–եռանկյուններից (գծագրում՝ 5 եռանկյունի), կոչվում է բուրգ:

SO–ն ուղղահայաց է հիմքին: Կարդացվում է SABCDE:

Բազմանկյունը բուրգի հիմքն է, եռանկյունները՝ նիստերը, S–ը՝ գագաթը, SO–ն՝ բարձրությունը:



Նկ. 19

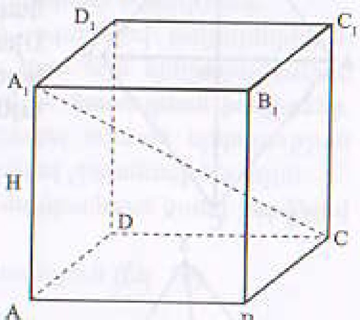
Եթե բուրգի հիմքը կանոնավոր բազմանկյուն է, և գագաթը հիմքի կենտրոնին միացնող հատվածը բարձրությունն է, ապա բուրգը կոչվում է **կանոնավոր**:

Կանոնավոր բուրգի բոլոր կողմնային կողերը (SE, SA, SB...) իրար հավասար են: Այդպիսի բուրգի կողմնային նիստերը համընկնելի են (հավասար են):

$V = S_{հիմք} \cdot H$

Զուգահեռանիստ: Այն մակերևույթը, որը կազմված է ABCD և $A_1B_1C_1D_1$ հավասար զուգահեռագծերից և ABB_1A_1, BCC_1B_1, DCC_1D_1, ADD_1A_1 զուգահեռագծերից, կոչվում է զուգահեռանիստ:

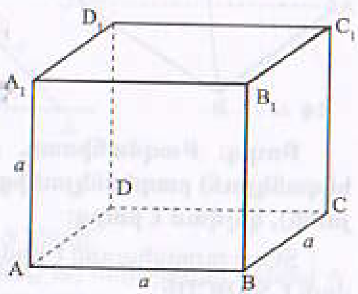
Եթե զուգահեռանիստի 6 նիստերն ուղղանկյուններ են, ապա այն կոչվում է ուղղանկյունանիստ կամ ուղղանկյուն զուգահեռանիստ: Կարդացվում է $ABCDA_1B_1C_1D_1$: Զուգահեռանիստի հանդիպակաց նիստերը զուգահեռ են և հավասար: Երկու նիստեր կոչվում են զուգահեռ, եթե նրանց հարթությունները զուգահեռ են: A_1C–ն անկյունագիծ է:



Նկ. 20

Ուղղանկյունանիստի մի գագաթից ելնող երեք կողերի երկարությունները կոչվում են ուղղանկյունանիստի չափումներ (AD, AB և AA_1):

$$V = AB \cdot AD \cdot AA_1 = S_{հիմք} \cdot H$$



Նկ. 21

Հավասար չափումներ ունեցող ուղղանկյունանիստը կոչվում է **խորանարդ:**

Խորանարդի բոլոր նիստերը իրար հավասար քառակուսիներ են:

$V = a^3$

Գլան: Այն երկրաչափական մարմինը, որն ստացվում է ուղղանկյանն իր կողմերից մեկի շուրջ պտտելով, կոչվում է գլան (ուղիղ շրջանային գլան):

Նկ. 22

OO_1–ը գլանի բարձրությունն է, առանցքն է: O և O_1 կենտրոններով շրջանները գլանի հիմքերն են: l–ը գլանի ծնորդն է:

Գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը՝

$S = 2\pi Rh$:

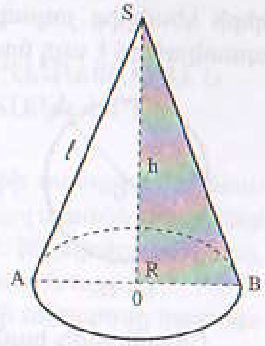
Գլանի լրիվ մակերևույթի մակերեսը՝

$S = 2\pi R(h + R)$:

Գլանի ծավալը՝ $V = \pi R^2h$:

Գլանի բարձրությունն ուղղահայաց է հիմքերի հարթություններին:

Կոն: Այն երկրաչափական մարմինը, որն ստացվում է ուղղանկյուն եռանկյունն իր էջերից մեկի շուրջը պտտելուց, կոչվում է կոն (կամ ուղիղ շրջանային կոն):



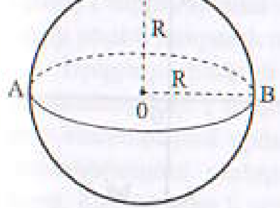
Նկ. 23

SO–ն բարձրությունն է, l–ը՝ ծնորդ, R–ը՝ հիմքի շառավիղ:

$S = \pi Rl$ Տլրիվ $= \pi Rl + \pi R^2$

$V = \frac{1}{3}\pi R^2h$, $V = \frac{1}{3}S_{հիմք} \cdot h$

Գունդ: Այն մակերևույթը, որը կազմված է տարածության այն բոլոր կետերից, որոնք գտնվում են տրված կետից տրված հեռավորության վրա, կոչվում է գնդային մակերևույթ: Գնդային մակերևույթով պարփակված մարմինը կոչվում է գունդ:



Նկ. 24

Այլ կերպ կարելի է սահմանել այսպես. **O կենտրոնով և R (R > 0) շառավղով գունդ է կոչվում տարածության այն կետերի բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրի հեռավորությունը O կետից մեծ չէ R–ից:**

Կա նաև մեկ այլ սահմանում. **Գունդ է կոչվում այն երկրաչափական մարմինը, որը**

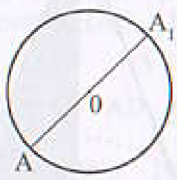
բաղկացած է տարածության այն բոլոր կետերից, որոնք տրված կետից (O–ից) ունեն միևնույն հեռավորությունը: O–ն գնդի կենտրոնն է, R–ը՝ շառավիղը:

Գնդային մակերևույթի մակերեսը՝ $S = 4\pi R^2$

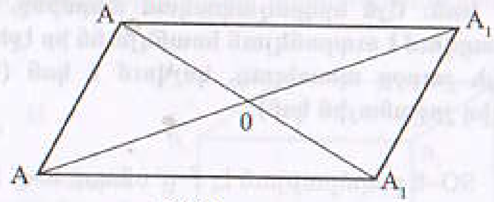
Գնդի ծավալը՝ $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ կամ $V = \frac{1}{6}\pi d^3$, d–ն տրամագիծն է. $d = 2R$:

Կենտրոնական համաչափություն: A և A_1 կետերը համաչափ են O կետի նկատմամբ, եթե $OA=OA_1$, այսինքն՝ O–ն AA_1 հատվածի միջնակետն է:

Պատկերը կոչվում է համաչափ O կետի նկատմամբ, եթե այդ պատկերի կետերից յուրաքանչյուրի համաչափ կետը O կետի նկատմամբ պատկանում է այդ նույն պատկերին: Օրինակ՝



Նկ. 25

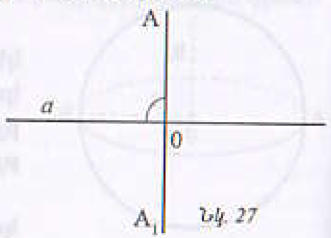


Նկ. 26

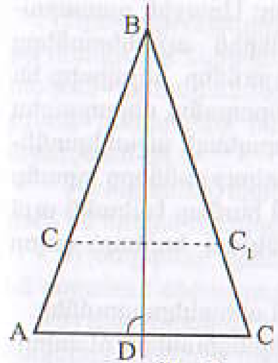
Շրջանագծի համաչափության կենտրոնը հենց շրջանագծի կենտրոնն է: Զուգահեռագծի համաչափության կենտրոնն անկյունագծերի հատման կետն է:

Առանցքային համաչափություն: A և A_1 կետերը կոչվում են համաչափ a ուղղի նկատմամբ, եթե AA_1 հատվածն ուղղահայաց է a ուղղին և $AO=A_1O$: a ուղղի յուրաքանչյուր կետ համաչափ է ինքն իրեն:

Պատկերը կոչվում է համաչափ ուղղի նկատմամբ, եթե այդ պատկերի յուրաքանչյուր կետի համաչափ կետն ուղղի նկատմամբ պատկանում է այդ նույն պատկերին: Տարված ուղիղը կոչվում է համաչափության առանցք:



Նկ. 27



Նկ. 28

Օրինակ՝ հավասարասրուն եռանկյունն ունի համաչափության մեկ առանցք:

$BD \perp AC$, $AD = DC$

BD առանցքի նկատմամբ ABC եռանկյունը համաչափ է:

Հավասարակողմ եռանկյունն ունի համաչափության երեք առանցք:

Քառակուսին ունի համաչափության չորս առանցք:

Ուղղանկյունը (եթե այն քառակուսի չէ) ունի համաչափության երկու առանցք:

§2. ՏԱՐՐԱԿԱՆ ԴՊՐՈՑՈՒՄ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՆՅՈՒԹԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ՆՊԱՏԱԿՆԵՐԸ

Տարրական դպրոցում երկրաչափական նյութի ուսուցման հիմնական նպատակն է աշակերտների մեջ ձևավորել պարզ պատկերացումներ այնպիսի երկրաչափական պատկերների մասին, ինչպիսիք են կետը, գիծը, ուղիղ գիծը, հատվածը, բեկյալը, բազմանկյունը և այլն:

Տարրական դպրոցում երկրաչափական նյութի ուսուցումը կատարվում է թվաբանական և հանրահաշվական նյութի հետ համատեղ:

Երկրաչափական նյութի ուսուցումը պետք է.

1) աշակերտների մեջ ձևավորի երկրաչափական պատկերացումներ: Այդ ուղղությամբ տարվող աշխատանքներն ուսուցիչը կարող է կազմակերպել այնպես, որ աշակերտները երկրաչափական պատկերների հատկությունները բացահայտեն գործնական աշխատանքները կատարելու միջոցով: Հենց այդ աշխատանքների միջոցով էլ նրանք պետք է տիրապետեն ուսուցվող երկրաչափական հասկացություններին, ձեռք բերեն որոշակի ունակություններ և կարողություններ:

Երկրաչափական պատկերացումների ձևավորման համար նպատակահարմար է նախ կոնկրետ առարկայից անցնել նրա պատկերին, իսկ հետագայում պատկերից՝ առարկային: Օրինակ՝ ուղիղ գծի մասին պատկերացում ստեղծելու նպատակով կարելի է ցույց տալ սեղանի եզրը, ձգված թելը և այլն:

2) զարգացնի աշակերտների մտածողությունը: Առաջին դասարանում ծանոթանալով երկրաչափական պատկերներին՝ աշակերտները սկսում են կատարել այնպիսի մտավոր գործողություններ, ինչպիսիք են վերլուծումը և համադրումը: Ուսուցիչը պետք է կարողանա մեթոդապես ճիշտ վերլուծել երկրաչափական պատկերները, որպեսզի աշակերտները կարողանան բացահայտել նրանց էական հատկությունները՝ դրանք տարբերելով ոչ էականներից: Օրինակ՝ եռանկյան համար էականն այն է, որ ունի երեք անկյուն (երեք կողմ), ուղղանկյան համար՝ բոլոր անկյուններն ուղիղ են:

3) աշակերտների մեջ ձևավորի տարածական պատկերացումներ:

Առաջին դասարանում տարածական պատկերացումները ձևավորվում են առարկաների միջև եղած հարաբերությունների ուսուցման ժամանակ: Այդ հարաբերությունները տրվում են «բարձր», «ցածր», «ձախից», «աջից», «վերևից», «ներքևից» և այլ բառերի միջոցով:

Հետագայում աշակերտների մեջ տարածական պատկերացումներ ստեղծելու ուղղությամբ կատարվող աշխատանքն ավելի է խորացվում և ընդլայնվում: Նրանք ծանոթանում են տարածական մարմիններից՝ գլանին, կոնին, բառանիստին, խորանարդին և այլն:

4) աշակերտների մեջ ձևավորի չափողական գործիքներից օգտվելու կարողություններ:

Երկրաչափական նյութի ուսուցման ընթացքում ուսուցիչը պետք է անընդմեջ աշխատանք տանի չափողական, գծագրական գործիքներից օգտվելու աշակերտների կարողությունները ձևավորելու ուղղությամբ: Աշակերտները պետք է կարողանան ճիշտ օգտվել քանոնից, կարկինից, գծագրական եռանկյունուց:

Տարրական դպրոցում մաթեմատիկայի ուսուցման ժամանակ երկրաչափական պատկերները հաճախ են օգտագործվում որպես զննական պարագաներ: Դա հնարավորություն է տալիս, որ աշակերտներն ավելի լավ ծանոթանան նրանց հատկություններին:

Որոշ դասվարներ հաճախ լուրջ ուշադրություն չեն դարձնում դասագրքում տրված երկրաչափական բովանդակությամբ վարժությունների լուծմանը: Իսկ դա հանգեցնում է նրան, որ հետագայում ուսուցվող հասկացությունները լավ չեն յուրացվում (խզվում է կապը): Դասվարը պետք է լավ գիտակցի, որ հասկացությունները ձևավորվում են տեսասեռային հարաբերությունների միջոցով (ուղղանկյուն–քառակուսի): Տարրական դպրոցում ուսուցվող երկրաչափական հասկացությունները հիմնականում չեն սահմանվում:

Որպեսզի ուսուցիչը կարողանա ճիշտ ընտրել երկրաչափական նյութի ուսուցման մեթոդիկան, պետք է պարզ պատկերացում ունենա տարրական դասարաններում ուսուցվող երկրաչափական բովանդակության խնդիրների համակարգի մասին: Տարրական դասարաններում ուսուցվում են.

1) խնդիրներ, որոնցում երկրաչափական պատկերներն օգտագործվում են որպես հաշվային նյութ,

2) խնդիրներ, որոնց լուծման միջոցով աշակերտները պատկերացում են ստանում մեծությունների մասին (երկարություն, մակերես),

3) հաշվողական խնդիրներ՝ բազմանկյան պարագիծը, ուղղանկյան մակերեսը գտնելու վերաբերյալ,

4) կառուցման խնդիրներ՝ քանոնի, կարկինի միջոցով,

5) երկրաչափական պատկերները դասակարգելու վերաբերյալ վարժություններ (տարբերել քառակուսիները, ուղղանկյունները և այլն),

6) խնդիրներ՝ տրված պատկերը մասերի բաժանելու և տրված մասերով պատկերը վերականգնելու կամ նոր պատկեր ստանալու վերաբերյալ:

§ 3. ԱՇԱԿԵՐՏՆԵՐԻՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՊԱՏԿԵՐՆԵՐԻ ՀԵՏ ԾԱՆՈԹԱՑՆԵԼՈՒ ՄԵԹՈԴԻԿԱՆ

Աշակերտները երկրաչափական պատկերների մասին որոշ պատկերացումներ են ունենում դեռ նախադպրոցական հասակում: Նրանք կարողանում են բազմանկյունը տարբերել շրջանից, քառակուսին՝ բառանկյունից: Ցույց են տալիս բազմանկյան (եռանկյան, քառանկյան) գագաթները և հաշվում են դրանք: Դպրոցում ուսուցիչը պետք է կարողանա նրանց երկրաչափական գիտելիքները հայտնաբերել, համակարգել, ընդլայնել ու ընդհանրացնել:

Կետի մասին աշակերտների ունեցած պատկերացումներն ընդհանրացնելու նպատակով ուսուցիչը կարող է կավիճը սեղմել գրատախտակին, մատիտը՝ տետրի թղթին և հետո ցույց տալ առաջացած հետքը: Նման աշխատանք պետք է կատարեն նաև աշակերտները: Այնուհետև ուսուցիչը կարող է ցուցադրել վանդակավոր թղթի վրա պատկերված ուղիղների հատման կետերը: Ցույց տալով երկու ուղիղներ՝ ուսուցիչը աշակերտների մեջ կարող է ձևավորել այն պատկերացումը, որ երկու ուղիղներ կարող են հատվել միայն մեկ կետում (ուղիղների համընկնելու մասին ոչինչ չի ասվում):

Կետի մասին աշակերտների պատկերացումներն ընդլայնելու և ամրապնդելու նպատակով կարելի է կատարել գործնական աշխատանքներ:

1) Վանդակավոր թղթի վրա ցո՛ւյց տուր երկու ուղիղների հատման կետը: Այդ կետից դեպի ձախ ցո՛ւյց տուր ուղիղների հատման մեկ ուրիշ կետ (նույնը՝ դեպի աջ, դեպի վերև, դեպի ներքև): Այդպիսի վարժությունները աշակերտների մեջ զարգացնում են տարածական պատկերացումներ:

2) Տետրում ցո՛ւյց տուր մի կետ, որով ոչ մի ուղիղ չի անցնում:

Թվաբանության ուսուցման ժամանակ աշակերտներից կարելի է պահանջել, որ նրանք հաշվեն գրատախտակին կամ տետրում պատկերված կետերը:

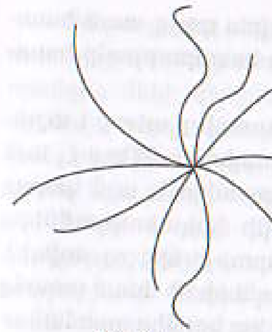
Կետի մասին աշակերտները պատկերացում են ստանում նաև հայոց լեզվի, նկարչության դասերի ընթացքում: Գծի մասին պատկերացում տալու նպատակով կարելի է գրատախտակին նշել որևէ կետ և մտովին պատկերացնել, որ այն շարժվում է (ցանկացած ուղղությամբ)՝ իր հետևից թողնելով հետք (կավիճով ցույց տալ) (նկ. 29):

Նկ. 29.

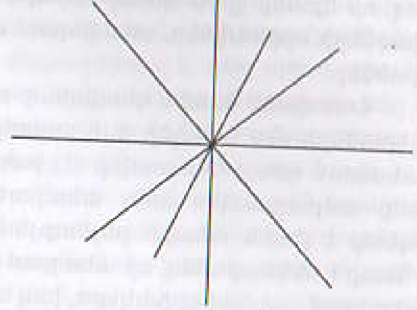
Որպես ուղիղ գծի մոդել՝ կարելի է ցույց տալ պիրկ ձգված լարը:

Ուղիղ գծի մասին պատկերացում տալու նպատակով կարելի է լարը պիրկ ձգել, ցույց տալ գծված ուղիղները, սեղանի եզրագիծը և այլն:

Նպատակահարմար է ցույց տալ, որ մեկ կետով կարելի է տանել ցանկացած թվով ուղիղ կամ կոր գծեր (նկ. 30, 31):

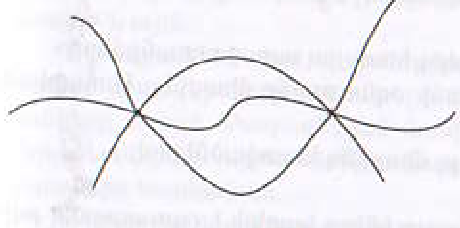


Նկ. 30



Նկ. 31

Ուսուցման այդ փուլում աշակերտները պետք է ծանոթանան ուղիղ գծի կարևորագույն հատկությանը՝ երկու կետով կարելի է անցկացնել միայն մեկ ուղիղ: Այդ նպատակով նախ կարելի է ցույց տալ, որ տրված երկու կետով կարելի է տանել ցանկացած թվով կոր գծեր (նկ. 32), իսկ ուղիղ գիծ՝ միայն մեկը (նկ. 33):



Նկ. 32

Նկ. 33

Ուղիղ գծի մասին աշակերտների պատկերացումներն ընդլայնելու նպատակով պետք է ցուցադրել ոչ միայն քանոնի եզրագիծը և քանոնի միջոցով ուղղի գծելը, այլ նաև այս կամ այն հարթ պատկերի եզրագիծը, թուղթը երկու մասի ծալելուց ստացված ծալման գիծը և այլն:

Հատվածի մասին գաղափար տալու նպատակով կարելի է գրատախտակին գծել ուղիղ գիծ ու նրա վրա վերցնել երկու կետ: Թողնելով այդ երկու կետերը և նրանց միջև ընկած ուղղի մասը՝ մնացածը մաքրել: Ցուցադրելով գրատախտակին մնացած ուղղի մասը՝ ուսուցիչն ասում է, որ դա հատված է, որն ունի երկու ծայրակետ: Հատվածի մասին աշակերտների ստացած գիտելիքներն ամրապնդելու նպատակով պետք է պահանցել, որ նրանք շրջապատի առարկաների, իրերի վրա ցույց տան հատվածների օրինակներ, տետրերում գծեն կամավոր երկարությամբ հատվածներ:

Հատվածի մասին գաղափար տալուց հետո ուսուցիչը պետք է աշակերտների մեջ ստեղծի այն պատկերացումը, որ ուղիղն անվերջ է, այն տետրում գծելը հնարավոր չէ, իսկ հատվածը վերջավոր է, այն կարող ենք ամբողջապես գծել տետրում (հատվածների երկարությունները պետք է լինեն տետրի լայնությունից կամ երկարությունից ոչ ավելի): Պետք է մեկնաբանել, որ տետրում գծում ենք ուղիղների մի մասն առանց կետերով սահմանափակելու, իսկ հատվածներ՝ երկու կողմից սահմանափակված:

Նկ. 34

Նպատակահարմար է նշել, որ քանոնի եզրը, հարթ պատկերների եզրագծերը, որոնք անվանում էինք ուղիղ գծի պատկերներ, ուղիղ գծի հատվածներ են:

Այնուհետև կարելի է առաջարկել հետևյալ առաջադրանքները.

1) Վերցնել երկու կետ և քանոնի օգնությամբ միացնել: Ստացված պատկերը հատված է:

2) Վերցնել 4 կետ և զույգ–զույգ միացնել հատվածներով:

Քանի՞ հատված կստացվի:

Այս բովանդակության վարժությունները կարելի է օգտագործել բլի գաղափարի ձևավորման համար: Կետի, հատվածի մասին աշակերտների պատկերացումները ձևավորելիս ստեղծվում է իրական հիմք, որպեսզի երկրաչափական պատկերները դիտարկվեն որպես կետերի բազմություն:

Հետագայում աշակերտներին պետք է սովորեցնել, որ համեմատեն հատվածների երկարությունները (աչքաչափով, չափման կամավոր միավորով): Չափման միավորների ուսուցումից հետո աշակերտները պետք է կարողանան չափել հատվածները և արդյունքները համեմատել:

Բեկյալ գծի մասին աշակերտների պատկերացումները ձևավորելու նպատակով պետք է ցույց տալ նրա մոդելը՝ լուցկու հատիկները կամ հաշվեհողիկները պլաստիլինով (ծեփամածիկով) միացնելով այնպես, որ ստացվի կանոնավոր բաց բեկյալ: Հետագայում կարելի է ցույց տալ նաև կանոնավոր փակ բեկյալի մոդելը:

Ցուցադրելով բեկյալի մոդելը, գրատախտակին գծելով բեկյալ գիծ՝ ուսուցիչը մեկնաբանում է, որ դա բաղկացած է այնպիսի հատվածներից, որոնցից մեկի վերջնակետը մյուսի սկզբնակետն է, ընդ որում՝ դրանք միևնույն ուղղի վրա չեն դասավորված: Նշվում է, որ բեկյալը կարող է լինել բաց կամ փակ, բեկյալի երկարությունը հաշվելու համար պետք է գտնել նրա բոլոր հատվածների երկարությունները և իրար գումարել:

Կետի և *գծի* մասին աշակերտներին պատկերացում տալուն զուգընթաց աշխատանք է տարվում բազմանկյունների ուսուցման ուղղությամբ: Դեռևս թվաբանության ուսուցման ժամանակ բազմանկյուններն օգտագործվում են որպես հաշվենյութ: Օրինակ՝ ցուցադրելով եռանկյունը՝ ասվում է, որ այն ունի երեք գագաթ, երեք կողմ: Ցուցադրելով քառանկյունը՝ երեխաները հաշվում են նրա գագաթները, կողմերը և համոզվում, որ այն ունի 4 գագաթ, 4 կողմ:

Տարրական դպրոցում *բազմանկյունը* չի սահմանվում: Ցուցադրվում են երկրաչափական հարթ պատկերներ՝ եռանկյուններ, քառանկյուններ, հնգանկյուններ և ասվում է, որ դրանք բազմանկյուններ են: Յուրաքանչյուր երեխա պետք է հասկանա, որ եռանկյունը բազմանկյուն է, որն ունի 3 կողմ, 3 գագաթ: Քառանկյունը բազմանկյուն է, որն ունի 4 կողմ, 4 գագաթ և այլն:

Ուշադրավ են այն վարժությունները, որոնցում պահանջվում է տրված պատկերներից անջատել և անվանել եռանկյունները, քառանկյունները և այլն: Բազմանկյան մասին աշակերտների պատկերացումները ձևավորելու աշխատանքը պետք է կազմակերպել այնպես, որ աշակերտները հասկանան.

ա) բազմանկյան եզրագիծը փակ բեկյալ գիծ է,

բ) բազմանկյունը այդ բեկյալով սահմանափակված պատկերն է,

գ) փակ բեկյալը կազմող հատվածներն անվանում են բազմանկյան կողմեր,

դ) փակ բեկյալի գագաթները բազմանկյան գագաթներն են,

ե) ելնելով գագաթների (կամ կողմերի) թվից՝ բազմանկյունները բաժանվում են եռանկյունների, քառանկյունների, հնգանկյունների և այլն:

Ուղղանկյան մասին աշակերտների պատկերացումները ձևավորելու համար նախ պետք է գաղափար տրվի անկյան, իսկ հետո՝ ուղիղ անկյան մասին: *Անկյան*՝ որպես երկրաչափական պատկերի մասին, աշակերտներին պատկերացում տալու նպատակով կարելի է վերցնել թղթից պատրաստված բազմանկյունը և ցույց տալ նրա անկյունները:

Այնուհետև մկրատով այնպես կտրել, որ յուրաքանչյուրը պարունակի բազմանկյան մեկ գագաթը և այդ գագաթից ելնող երկու կողմերը (կամ նրանց մի մասը): Ցուցադրելով ստացված յուրաքանչյուր մասը՝ ուսու-
ցիչն ասում է, որ դրանք անկյան թղթյա մոդելներն են:

Քանի որ տարրական դպրոցի աշակերտները պատկերացում չունեն «հարթության» հասկացության մասին, ուստի անկյան սահմանում տալը անհնար է և մեթոդական տեսակետից էլ ցանկալի չէ: Սակայն դասվարը պետք է իմանա, որ «անկյուն» հասկացությունը երկրաչափությունում կիրառվում է տարբեր իմաստով՝ հարթ անկյուն, երկնիստ, բազմանիստ անկյուններ և այլն:

Փաստորեն տարրական դպրոցում հարթ անկյան գաղափարը ձևավորվում է որպես «բազմանկյունից անջատված անկյուն», որը զննական լինելով՝ հեշտությամբ ընկալվում է աշակերտների կողմից:

Աշակերտների մեջ անկյան գաղափարը ավելի լավ ձևավորելու նպատակով պետք է ցուցադրել շարժական կողմերով անկյան մոդելը (երկու ձողիկներ, որոնց մեկական ծայրերն իրար են ամրացված այն-
պես, որ այդ ամրացման կետի շուրջը ձողիկները պտտվեն): Աշխատան-
քը պետք է կազմակերպել այնպես, որ յուրաքանչյուր աշակերտ հաս-
կանա. *անկյունը երկրաչափական պատկեր է*, որն ունի երկու կողմ, մեկ
գագաթ, անկյունը սահմանափակված է այդ երկու կողմերով:

Նպատակահարմար է, որ տարբեր մեծության անկյուններ գծագր-
վեն թե՛ տետրերում, և թե՛ գրատախտակին:

Ուղիղ անկյան մասին աշակերտներին պատկերացում տալու
համար կարելի է յուրաքանչյուր աշակերտին հանձնել որոշակի ձև ունե-
ցող թղթի կտոր ու ցույց տալ, թե ինչպես երկու հաջորդական ծալման
միջոցով այդ նույն թղթի վրա կստացվի ուղիղ անկյան պատկերը:

Ցուցադրելով գծագրական եռանկյան ուղիղ անկյունը, ուղիղ անկյան
նախօրոք պատրաստված մոդելը՝ աշակերտներին ավելի պարզ
պատկերացում է տրվում ուղիղ անկյան մասին: Վերադրելով ուղիղ անկ-
յան մոդելներ, որոնց կողմերն ունեն տարբեր երկարություններ, աշա-
կերտները համոզվում են, որ բոլոր ուղիղ անկյուններն իրար հավասար են
(առանց իմանալու, որ նրանցից յուրաքանչյուրը հավասար է 90°–ի):

Անկյունների համեմատումը կատարվում է ուղիղ անկյան մոդելի
միջոցով: Համեմատելով անկյունները՝ աշակերտները պետք է հանգեն այն
եզրակացության, որ անկյունները լինում են ուղիղ և ոչ ուղիղ՝ սուր, բութ:

Ուղիղ անկյան մոդելի միջոցով աշակերտները պարզում են, որ
եռանկյան միայն մեկ անկյունը կարող է լինել ուղիղ, իսկ քառանկյանը՝

մեկ, երկու և չորս անկյուններ: Պետք է գործնականորեն ցույց տալ, որ
եթե քառանկյան երեք անկյունները ուղիղ են, ապա 4–րդ անկյունը ևս
ուղիղ է: Գործնական աշխատանքների միջոցով աշակերտները համոզ-
վում են, որ կան այնպիսի քառանկյուններ, որոնց բոլոր անկյունները
ուղիղ են: Ընդհանրացնելով՝ ուսուցիչն ասում է. այն քառանկյունները,
որոնց 4 անկյուններն էլ ուղիղ են, կոչվում են **ուղղանկյուններ**:

Հետագայում չափելով ուղղանկյան կողմերի երկարությունները՝
աշակերտները հայտնաբերում են նրա կարևորագույն հատկությունը՝
հանդիպակաց կողմերն իրար հավասար են:

Չափելով ուղղանկյան կողմերի երկարությունները՝ աշակերտները
համոզվում են, որ կան այնպիսի ուղղանկյուններ, որոնց բոլոր կողմերի
երկարությունները իրար հավասար են: Ընդհանրացնելով երեխաների
կատարած աշխատանքը՝ ուսուցիչն ասում է. այն ուղղանկյունները,
որոնց բոլոր կողմերի երկարություններն իրար հավասար են, անվանում
են **քառակուսիներ**:

Աշակերտները պետք է տեսնեն քառանկյուն–քառակուսի հասկա-
ցությունների կապը, իսկ դասվարը պիտի իմանա, որ այդ սահմանումնե-
րը տրվում են՝ ելնելով պատկերների միջև եղած տեսասեռային հարաբե-
րություններից:

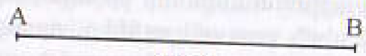
Շրջանագծի և շրջանի գաղափարների ձևավորման մասին կխո-
սենք նրանց կառուցումները մեկնաբանելիս:

§ 4. ՊԱՏԿԵՐՆԵՐԻ ՆՇԱՆԱԿՈՒՄԸ ՏԱՌԵՐՈՎ

Տարրական դպրոցում երկրաչափական պատկերների ուսուցման
սկզբնական շրջանում տառային պայմանանշաններ չեն օգտագործվում:
Մեկ երկրաչափական պատկերը մյուսից տարբերելու համար նրանց
տրվում է տարբեր գույն: Որոշ դեպքերում էլ նրանք համարակալվում են,
և մեկը մյուսից տարբերելու համար նշվում է համարը:

Հետագայում երկրաչափական նյութի ուսուցման համար կարևոր
տեղ է հատկացվում տառային պայմանանշանների օգտագործմանը:
Դրանց ներմուծումը կատարվում է աստիճանաբար: Նախ կետերն
իրարից տարբերելու համար յուրաքանչյուրին տրվում է իր «անունը»:
Յուրաքանչյուր կետի կողքին գրվում է լատինական կամ հայկական
այբուբենի մեծատառերից որևէ մեկը: Աշակերտները գիտակցում են, որ

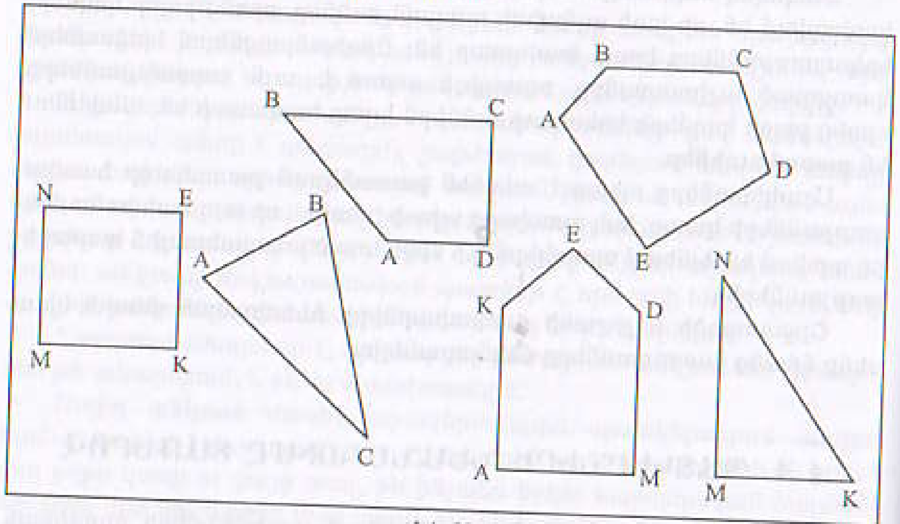
հատվածի ծայրերը ևս կետեր են, դրանք ևս պետք է ունենան իրենց «անունը»: Այսպիսով՝ հատվածները ևս նշանակվում են տառերով՝ AB:



Նկ. 35

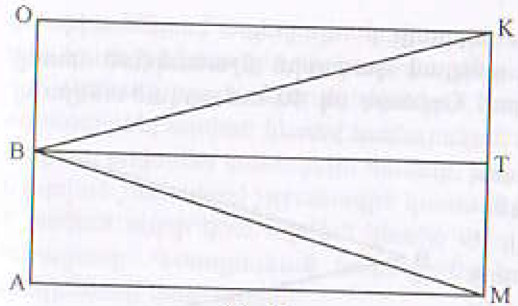
Կարդացվում է «AB կամ BA հատվածը»: Աշակերտները գիտակցում են, որ AB և BA հատվածները նույնն են:

Քանի որ բազմանկյան գագաթները ևս կետեր են, ուրեմն նրանց ևս կարելի է տալ իրենց «անունը» (նկ. 36):



Նկ. 36

Ունենալով նման գծագիր՝ աշակերտներից կարելի է պահանջել, որ անվանեն եռանկյունները, քառանկյունները, հնգանկյունները: Նրանք պետք է հասկանան, որ BAC, ABC, CAB նույն եռանկյունն է: Տառային պայմանանշանների օգտագործումը հիշտացնում է երկրաչափական նյութի ուսուցումը, հնարավորություն է տալիս նույն գծագրում եղած երկրաչափական պատկերներից անվանել, առանձնացնել համապատասխան պատկերները: Օրինակ՝ անվանել և առանձին գրի առնել նկ. 37–ում տրված ա) ուղղանկյունները, բ) քառանկյունները, գ) եռանկյունները, դ) հատվածները և այլն:



Նկ. 37

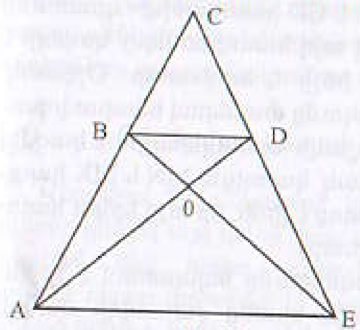
Առաջին դեպքում աշակերտները պետք է կարողանան անվանել ու գրել AOKM, ABTM, BOKT ուղղանկյունները:

Երկրորդ դեպքում՝ AOKM, ABTM, BOKT, ABKM, MBOK քառանկյունները:

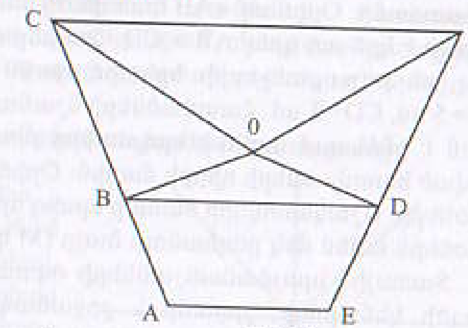
Երրորդ դեպքում՝ ABM, BTM, BTK, BOK, KBM եռանկյունները:

Չորրորդ դեպքում՝ AM, AB, BO, OK և այլն հատվածները:

Քննարկենք ուրիշ օրինակ (նկ. 38, նկ. 39):



Նկ. 38



Նկ. 39

Յուրաքանչյուր նկարում ցո՛ւյց տուր. 1) մի քանի պատկեր, որոնց համար BD հատվածը ընդհանուր կողմ է, գրի՛ր այդ պատկերների անվանումները, 2) բոլոր այն պատկերները, որոնց համար AE կողմը ընդհանուր է:

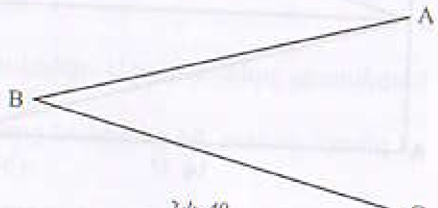
Առաջին առաջադրանք. նկ. 38–ի եռանկյան պատկերում ունենք CBD, ODB, ABD, EBD եռանկյունները և ABDE քառանկյունը: Նկ. 39–ի քառանկյան պատկերում ունենք ABDE, BCKD քառանկյունները և OBD, CBD, KBD եռանկյունները:

Երկրորդ առաջադրանք. նկ. 38–ի պատկերում ունենք AEC, AEO, AEB, AED եռանկյունները և AEDB քառանկյունը, երկրորդ պատկերում (նկ. 39)՝ AEKC, AEDB, AEKB, AEDC քառանկյունները:

Նպատակահարմար է աշակերտներին սովորեցնել անկյունները տառերի միջոցով նշանակելը և կարդալը:

Պետք է սովորեցնել, որ անկյան գագաթին նշանակված տառը գրառման մեջ գրվում է մեջտեղում: Օրինակ՝ նկ. 40–ում տրված անկյունը կարդացվում է ABC կամ CBA:

Աշակերտները պետք է հասկանան, որ ABC և CBA անկյունները նույնն են: Կարելի է սովորեցնել, որ «անկյուն» բառի փոխարեն օգտագործեն «∠» նշանը: Այդ դեպքում պատկերված անկյունը կգրվի՝ ∠ABC կամ ∠CBA:



Նկ. 40

Տառային պայմանանշանները նպաստում են գրառումների կրճատմանը: Օրինակ՝ «AB հատվածը մեծ է CD հատվածից» գրառումը կարելի է կրճատ գրել՝ AB > CD: Չափելով այդ հատվածները՝ կարելի է գրել, թե յուրաքանչյուրի երկարությունն ինչի է հավասար: Օրինակ՝ AB=5 սմ, CD=3 սմ: Հատվածների նշանակումը տառերով հնարավորություն է ընձեռում տրված պայմանից որոշակի պատկերացում կազմել տրված հատվածների դիրքի մասին: Օրինակ՝ կառուցել MN և MK հատվածները: Աշակերտների համար պարզ պետք է լինի, որ այդ երկու հատվածներն ունեն մեկ ընդհանուր ծայր (M կետը):

Տառային պայմանանշանների օգտագործումը նպաստում է շրջանագծի կենտրոնի, շրջանի և շրջանագծի, դրանց շառավղի մասին աշակերտների պատկերացումների խորացմանը, հեշտացնում է այն խնդիրների պայմանի և լուծման գրառումը, որոնք պահանջում են հաշվել երկրաչափական հարթ պատկերների պարագծերը և մակերեսները:

§ 5. ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՏԱՐՐԱԿԱՆ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄՆԵՐ

Երկրաչափական պատկերների կառուցումը նպաստում է, որ աշակերտներն ավելի լավ պատկերացումներ ստանան դրանց մասին, կարողանան օգտվել չափողական գործիքներից և կառուցել այս կամ այն պատկերը: Սովորաբար կառուցման խնդիրները լուծելիս բացատրվում է, թե ինչպես կառուցել պատկերը և ապացուցվում է, որ կառուցված պատկերը համապատասխանում է խնդրի պահանջին: Սակայն տարրական

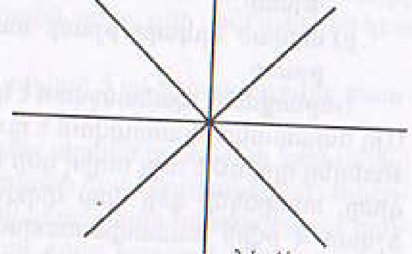
դասարաններում ապացուցումը չի տրվում, միայն բացատրվում է, թե ինչպես կարելի է կառուցել պահանջվող երկրաչափական պատկերը:

Քանոնը՝ որպես երկրաչափական կառուցումների գործիք, կարելի է օգտագործել տրված կետով կամայական ուղիղ, տրված երկու կետերով անցնող ուղիղներ կառուցելու համար, իսկ կարկինը՝ տրված կենտրոնով և տրված շառավղով շրջանագիծ կառուցելիս: Կարկինի միջոցով կարելի է տրված ուղղի վրա տրված կետից տեղադրել տրված երկարությամբ հատվածը: Գծագրական եռանկյունը կարելի է օգտագործել ուղիղ անկյուններ կառուցելիս:

Տարրական դասարաններում մաթեմատիկա դասավանդող ուսուցիչը պետք է լուրջ ուշադրություն դարձնի այն կառուցման խնդիրների վրա, որոնք տրված են դասագրքերում: Սակայն նա պետք է իմանա նաև որոշ պարզագույն կառուցումներ, որոնք կարող է բացատրել արտադասարանական, խմբակային պարապմունքների ժամանակ: Տարրական դասարանների մաթեմատիկայի դասընթացում ուսուցվող կառուցման խնդիրները պայմանականորեն կարելի է բաժանել հետևյալ խմբերի:

§ 5.1. Տրված կետով անցնող ուղիղների կառուցումը

Վերցվում է ցանկացած կետ և քանոնը դնելով այդ կետի վրա՝ անց է կացվում մեկ ուղիղ, այնուհետև քանոնի դիրքը փոխվում է՝ չկտրելով տրված կետից, նորից է գծվում ուղիղ գիծ և այդպես շարունակ: Արդյունքում ստացվում է միևնույն կետով անցնող ուղիղների փունջ:



Նկ. 41

§ 5.2. Քանոնի միջոցով կառուցել ուղիղ գիծ, որն անցնում է տրված երկու կետերով

Քանոնը դրվում է այդ կետերի վրա և մատիտով գծվում է ուղիղ գիծը:

Աշակերտներին պետք է առաջարկել, որ այդ երկու կետերով անցկացնեն մեկ ուրիշ ուղիղ գիծ: Փորձելով կատարել այդ պահանջը՝ երեխաները համոզվում են, որ տրված երկու կետով կարելի է տանել միայն մեկ ուղիղ գիծ:

§ 5.3. Ցանկացած երկարությամբ հատվածի կառուցումը

Ուղիղ գծի երկայնքով դրվում է քանոնը (երկարությունը կարող է լինել տարբեր): Ձախ և աջ վերջավորություններին համապատասխան՝ ուղիղ գծի վրա նշվում է երկու կետ:

Եթե բոլորի մոտ նույն երկարությամբ քանոններ կան, ապա կկառուցվի որոշակի երկարությամբ հատված: Այդ պատճառով էլ նպատակահարմար է, որ խնդիրը լուծվի առանց քանոնի: Նախօրոք կառուցված ուղիղ գծի վրա վերցնել կամավոր երկու կետ, ցույց տալ այդ կետերը և նրանցով սահմանափակված ուղիղ գծի մասը: Այդ դեպքում կառուցված հատվածները կունենան տարբեր երկարություն: Աշակերտները պետք է հասկանան, որ կառուցված հատվածի երկարությունը կախված է ուղիղ գծի վրա կետերի ընտրված դիրքից:

§ 5.4. Տրված երկարությամբ հատվածի կառուցումը

Այս պահանջով խնդիրների կառուցումը պետք է մեկնաբանվի երկու եղանակով.

ա) տրված երկարությամբ հատվածի կառուցումը քանոնի օգնությամբ,

բ) տրված երկարությամբ հատվածի կառուցումը կարկինի օգնությամբ:

Ենթադրենք՝ պահանջվում է կառուցել 4 սմ երկարությամբ հատված: Այդ նպատակով կառուցվում է ուղիղ գիծ և նրա վրա նշվում է որևէ կետ: Քանոնը դրվում է այդ ուղիղ գծի երկայնքով այնպես, որ սկիզբը՝ 0 նշագիծը, համընկնի գծի վրա վերցված կետին: Այնուհետև քանոնի վրա նշված 4 թվին համապատասխանող նշագծի դիմաց, ուղիղ գծի վրա նշվում է կետ: Քանոնը ուղիղ գծի վրայից վերցնելուց հետո ցույց է տրվում ստացված հատվածը, որի երկարությունը հավասար է 4 սմ:

Կարկինի միջոցով այդ նույն երկարությամբ հատված կառուցելու համար ուղիղ գծի վրա պետք է նշել կամավոր կետ, կարկինին տալ տրված հատվածի երկարությամբ բացվածք և, առանց փոփոխելու, սուր ծայրը դնել ուղիղ գծի վրա նախօրոք նշված կետում, իսկ մյուս ծայրով ուղղի վրա նշել մեկ ուրիշ կետ:

Որպեսզի աշակերտները համոզվեն, որ կառուցված հատվածի երկարությունը հավասար է 4 սմ–ի, կարելի է առաջարկել, որ քանոնի օգնությամբ չափեն ստացված հատվածի երկարությունը:

§ 5.5. Տրված հատվածի մեծացնելը (փոքրացնելը) մի քանի միավորով կամ մի քանի անգամ

Ենթադրենք՝ պահանջվում է 5 սմ երկարությամբ հատվածը մեծացնել 2 սմ–ով (նկ. 42):

Նկ. 42

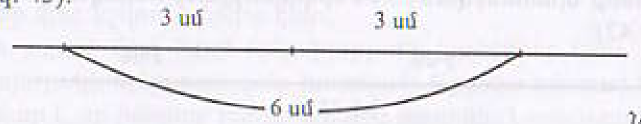
Կարևոր է, որ աշակերտները հասկանան. 5 սմ երկարությամբ հատվածը տրված է, կառուցված է:

Այդ հատվածը 2 սմ–ով մեծացնելու համար բավական է քանոնը դնել ուղղի երկայնքով այնպես, որ նրա որևէ նշագիծ համընկնի տրված հատվածի աջ ծայրակետին: Այդ նշագծից դեպի աջ քանոնի վրա հաշվում ենք 2 սմ և դրան համապատասխանող նշագծի դիմաց, ուղիղ գծի վրա նշում ենք որոշակի կետ: Ստացված հատվածը կլինի տրված հատվածից 2 սմ–ով երկար: Աշակերտներին համոզելու համար կարելի է պահանջել, որ չափեն ստացված նոր հատվածի երկարությունը (5 սմ + 2 սմ = 7 սմ): Այս կառուցումը կարելի է կատարել նաև կարկինի միջոցով: Այդ նպատակով պետք է կարկինին տալ 2 սմ բացվածք և, սուր ծայրը դնելով տրված հատվածի աջ ծայրակետին, ուղիղ գծի վրա նշել մեկ կետ (ծայրակետից դեպի աջ):

Այժմ ենթադրենք՝ պահանջվում է տրված 5 սմ երկարությամբ հատվածը փոքրացնել 2 սմ–ով:

Այդ նպատակով քանոնը պետք է դնել տրված հատվածի երկայնքով այնպես, որ 0 նշագիծը համընկնի հատվածի ձախ ծայրակետին: Քանոնի 5–ին համապատասխանող նշագիծը կհամընկնի հատվածի աջ ծայրակետին: Այնուհետև 5 նշագծից դեպի ձախ հաշվում ենք 2 նշագիծ (հասնում ենք երեք թվին համապատասխանող նշագծին) և հատվածի վրա նշում վերջին՝ 3 նշագծին համապատասխանող կետը: Փաստորեն՝ քանոնի օգնությամբ հաշվվում է 5 – 2 տարբերությունը: Պետք է պահանջել, որ աշակերտները չափեն ստացված հատվածի երկարությունը, որը պետք է հավասար լինի 3 սմ–ի: Հատվածը մի քանի անգամ մեծացնելու կամ փոքրացնելու վերաբերյալ կառուցման խնդիրների ուսուցումը կատարվում է բազմապատկման և բաժանման գործողությունների ուսուցման ընթացքում:

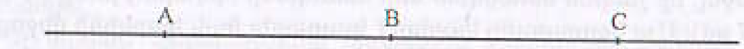
Ենթադրենք՝ տրված է 3 սմ երկարությամբ հատված և պահանջվում է այն մեծացնել 2 անգամ: Աշակերտները նախ պետք է հասկանան, որ կառուցման արդյունքում կստացվի հատված, որի երկարությունը կլինի 6 սմ: Իսկ այդ երկարությամբ հատվածը կառուցելու համար բավական է վերցնել որևէ ուղիղ գիծ ու նրա վրա տեղադրել 3 սմ երկարությամբ հատված (նկ. 43):



Նկ. 43

Այնուհետև տրված հատվածի աջ ծայրակետից սկսած ուղղի երկայնքով տեղադրել ևս 3 սմ երկարությամբ հատված: Ստացված նոր հատվածի երկարությունը հավասար կլինի 6 սմ, աշակերտները կարող են համոզվել չափելու միջոցով:

Տառային պայմանանշանների օգտագործման դեպքում նման խնդիրների կառուցման բացատրությունները դառնում են ավելի մատչելի: Վերը բերված խնդրում կարող ենք հատվածները նշանակել տառերով և գրառել (նկ. 44).



Նկ. 44

AB = 3 սմ
BC = 3 սմ
AC = 6 սմ

Տրված հատվածը մի քանի անգամ փոքրացնելու վերաբերյալ խնդիրները քննարկելիս պետք է նախօրոք վերցնել այնպիսի հատված, որի երկարությունն արտահայտող թիվը ամբողջ թիվ է, բաժանվում է այն թվի վրա, որքան անգամ տրված հատվածը պետք է փոքրացվի:

Ենթադրենք՝ տրված 8 սմ երկարությամբ հատվածը պետք է փոքրացվի երկու անգամ (նկ. 45):

Նկ. 45

Աշակերտները պետք է հասկանան, որ 8 սմ երկարությամբ հատվածը երկու անգամ փոքրացնելու հետևանքով կստացվի մի հատված, որի երկարությունը հավասար կլինի 4 սմ–ի:

Խնդիրը լուծելու համար պետք է վերցնել 8 սմ երկարությամբ հատված՝ AC = 8 սմ:

C ծայրից դեպի ձախ (կամ A ծայրից դեպի աջ) քանոնի վրա հաշվում ենք 4 նշագիծ ու նշում B կետը: Ստացված AB (կամ BC) հատվածը կլինի AC–ից երկու անգամ փոքր:

§ 5.6. Հատվածների գումարումը

Այս բովանդակությամբ կառուցման խնդիրները երեխաները յուրացնում են առանց դժվարությունների: Կառուցման խնդիրների ուսուցման ընթացքում աշակերտները սովորաբար դժվարանում են կառուցման գործիքներից օգտվելիս:

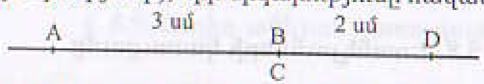
Ենթադրենք՝ պահանջվում է գումարել 3 սմ և 2 սմ երկարություն ունեցող հատվածները:

Փաստորեն՝ այս բովանդակությամբ խնդիրների կառուցումը հանգեցվում է նախօրոք ուսումնասիրված՝ տրված հատվածը մի քանի միավորով մեծացնելու խնդիրների հիշեցմանը:

Նկ. 46

Տրված է AB = 3 սմ, CD = 2 սմ: Պետք է կառուցել հատված, որի երկարությունը հավասար լինի. 3 սմ + 2 սմ = 5 սմ:

Կամայական ուղիղ գծի որևէ կետից տեղադրում ենք մի հատված (քանոնի կամ կարկինի օգնությամբ), որի երկարությունը հավասար լինի 3 սմ–ի:



Նկ. 47

B կետից սկսած՝ տրված ուղիղ գծի երկայնքով տեղադրում ենք 2 սմ երկարությամբ CD հատվածը: Ստացված AD հատվածը կլինի որոնելին՝ AD = 5 սմ (նկ. 47):

Եթե պահանջվում է գումարել երկուսից ավելի հատվածներ, ապա նրանք հաջորդաբար իրար են գումարվում նշված եղանակով:

§ 5.7. Հատվածի բաժանումը երկու հավասար մասերի

Այս բովանդակությամբ խնդիրների լուծումը կարելի է հանգեցնել տրված հատվածը մի քանի անգամ (տվյալ դեպքում՝ երկու անգամ) փոքրացնելու վերաբերյալ կառուցման խնդիրներին:

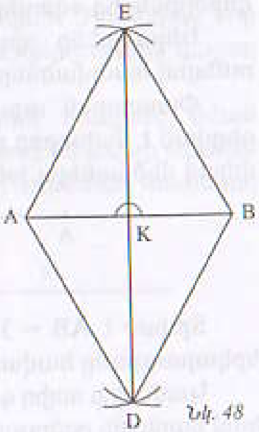
Օրինակ՝ տրված 6 սմ երկարությամբ հատվածը բաժանել երկու հավասար մասերի:

Աշակերտները պետք է հասկանան, որ տվյալ դեպքում տրված հատվածը փոքրացնում ենք երկու անգամ ($6:2=3$), իսկ այդպիսի խնդիրների լուծումը նրանք գիտեն:

Նպատակահարմար է, որ դասվարն իմանա այդ բովանդակությամբ խնդիրների ընդհանուր լուծումը:

Ենթադրենք՝ պահանջվում է կիսել տրված AB հատվածը:

A և B կետերից AB շառավղով գծում ենք շրջանագծեր, որոնք իրար հատվում են երկու կետերում՝ D–ում և E–ում: Միացնելով E և D կետերը՝ կստանանք ED հատվածը, որն AB հատվածը կիսում է հատման K կետում (նկ. 48):


Նկ. 48

A և B կետերը միացնելով D և E կետերին, կստանանք DBE և DAE եռանկյունները, որոնք իրար հավասար են՝ ըստ եռանկյունների երեք կողմերի հավասարության հայտանիշի՝ $\angle AEK = \angle KEB$, $\Delta AEK = \Delta EKB$, որովհետև KE կողմն ընդհանուր է, $AE = BE$ (հավասար շառավիղներ), իսկ $\angle AEK = \angle KEB$:

Ուրեմն՝ $KB = AK$ որպես հավասար եռանկյունների՝ իրար հավասար անկյունների դիմաց գտնվող կողմեր: Այսպիսով՝ AB հատվածը կիսվեց իրար հավասար երկու մասի՝ $AK = KB$:

§ 5.8. Եռանկյունների կառուցումը

Նկատի ունենալով, որ դասվարն ու տարրական դասարանների աշակերտները բազմաթիվ անգամ հանդիպում են եռանկյունների պատկերներին (որպես դիտողական պարագաներ, որպես հաշվենյութ և այլն), այն գծագրում են գրատախտակին, տետրերում, նպատակահարմար ենք համարում կանգ առնել եռանկյունների կառուցման վրա:

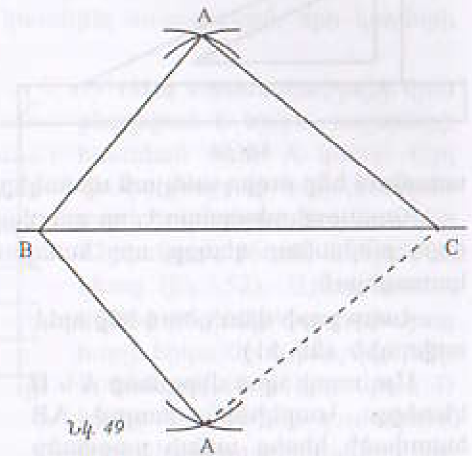
Ենթադրենք՝ տրված են եռանկյան երեք կողմերը, և պահանջվում է կառուցել այդ եռանկյունը:

Դիցուք՝ $AB = 5$ սմ, $BC = 7$ սմ, $CA = 6$ սմ:

Այդ երկարություններն ունեցող կողմերով եռանկյուն կառուցելու համար պետք է վերցնել որևէ ուղիղ և նրա վրա տեղադրել եռանկյան տրված կողմերից որևէ մեկի երկարությունը: Տրված ուղիղ գծի վրա տեղադրենք $BC = 7$ սմ:

C կետից՝ շրջանագծի կենտրոնից, $AC = 6$ սմ շառավղով գծենք շրջանագիծ (նկ. 49):

B կետից՝ որպես շրջանագծի կենտրոնից, $AB = 5$ սմ շառավղով ևս գծենք շրջանագիծ: Այդ շրջանագծերը կհատվեն A և A_1 կետերում: Այդ կետերը միացնելով B և C կետերին՝ կստանանք BAC և BA_1C եռանկյունները, որոնք երկուսն էլ բավարարում են խնդրի պահանջին:


Նկ. 49

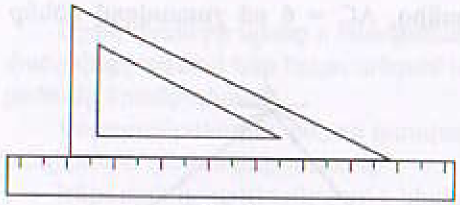
Ինչպես արդեն ասվել է, տարրական դպրոցում ապացուցումները չենք քննարկում: Շատ կարևոր է, որ դասվարը եռանկյան կողմերի երկարություններն ընտրելիս հաշվի առնի՝ եռանկյան ցանկացած կողմի երկարությունը պետք է փոքր լինի մյուս երկու կողմերի երկարությունների գումարից: Օրինակ՝ չի կարելի կառուցել եռանկյուն, որի կողմերի երկարությունները լինեն 3 սմ, 4 սմ և 8 սմ, որովհետև $3+4=7$, իսկ $7<8$:

§ 5.9. Ուղիղ անկյան կառուցումը

Տարրական դասարաններում ուղիղ անկյան կառուցման համար պետք է օգտվել ուղիղ անկյան մոդելից: Այդ մոդելի միջոցով վանդակավոր տետրում ուղիղ անկյուն կառուցելիս պետք է ուղիղ անկյան գագաթը համապատասխանեցնել երկու փոխուղղահայաց ուղիղների հատման կետի հետ: Դա նպաստում է, որ հետագայում վանդակավոր թղթի վրա ուղիղ անկյուն կառուցվի առանց ուղիղ անկյան մոդելի:

Աշակերտներին պետք է տեղեկացնել, որ ուղիղ անկյուն կառուցեն գծագրական եռանկյան և քանոնի օգնությամբ:

Այդ նպատակով ուղիղ գծի երկայնքով պետք է դնել քանոնը (նկ. 50):



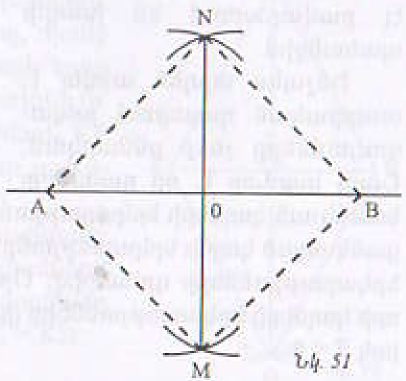
Նկ. 50

Քանոնի երկայնքով տեղադրել գծագրական եռանկյան ուղիղ անկյան կողմերից մեկը և ուղիղ անկյան մյուս կողմի երկայնքով տետրում գծել ուղիղ: Քանոնը և գծագրական եռանկյունը թղթից կտրելուց հետո ստանում ենք ուղիղ անկյան պատկերը:

Նպատակահարմար է, որ դասվարն իմանա ուղիղ անկյան կառուցելու ընդհանուր դեպքը, որը հանգում է տրված ուղղին ուղղահայաց կառուցելուն:

Հարթ թղթի վրա գծում ենք որևէ ուղիղ գիծ (նկ. 51):

Այդ ուղղի վրա վերցնենք A և B կետերը: Կարկինին տալով AB հատվածի կեսից ավելի բացվածք (աչքաչափով)՝ A և B կետերից, որպես կենտրոններից գծենք շրջանագծեր, որոնք կհատվեն M և N կետերում: M և N կետերը միացնենք ուղիղ գծով և ցույց տանք, որ O կետում՝ MN և AB ուղիղների հատման կետում, ստանում ենք ուղիղ անկյուններ:



Նկ. 51

ΔANB–ն հավասարասրուն է, ուստի՝ ∠OAN=∠OBN, ΔNAM = ΔNBM՝ որպես հավասարասրուն եռանկյուններ (AM = AN = BN = EM): Ուրեմն՝ ∠ANO = ∠BNO որպես համապատասխան անկյուններ:

ΔANO = ΔONB (երկու կողմով և նրանցով կազմված անկյունով): Նշանակում է ∠NOA = ∠NOB, իսկ նրանք կից են, նշանակում է նրանցից յուրաքանչյուրը հավասար է 90⁰–ի (քանի որ միասին կազմում են փռված անկյուն, իսկ փռված անկյունը հավասար է 180⁰–ի):

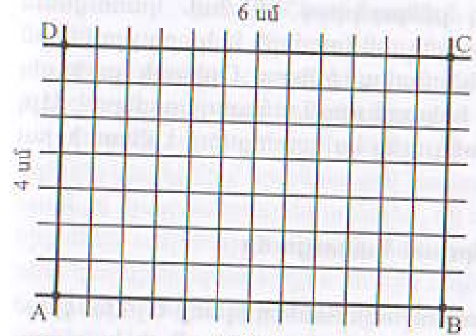
§ 5.10. Ուղղանկյան կառուցումը

Ուղղանկյուն կառուցելու համար աշակերտները պետք է լավ իմանան, որ նրա 4 անկյուններն էլ ուղիղ են, իսկ հանդիպակաց կողմերի երկարությունները՝ իրար հավասար:

Վանդակավոր թղթի վրա տրված կողմերով ուղղանկյուն կառուցելու

համար աշակերտները պետք է իմանան, որ երկու իրար հաջորդող վանդակների երկարությունը մեկ սանտիմետր է:

Ենթադրենք՝ պահանջվում է կառուցել ուղղանկյուն, որի կողմերի երկարություններն են 4 սմ և 6 սմ:



Նկ. 52

Այդ նպատակով թղթի վրա ընտրվում է երկու ուղիղների հատման որևէ A կետը: Այդ կետից դեպի աջ՝ հորիզոնական ուղղի երկայնքով, հաշվում ենք 12 վանդակ (6 սմ) և նշում B կետը (նկ. 52): Այնուհետև A կետից դեպի վերև՝ ուղղահայաց ուղղի երկայնքով, հաշվում ենք 8 վանդակ (4 սմ) ու նշում D կետը: Նույնն ենք կատարում՝ B կետից սկսած: Ստանում ենք C կետը: Միացնելով A, B, C, D կետերը՝ ստանում ենք որոնելի ուղղանկյունը: Պետք է հաշվի առնել, որ աշակերտներին «ուղղահայաց» տերմինը չի տրվում: Ուղղանկյան այսպիսի կառուցման համար նրա կողմերի երկարությունները պետք է արտահայտված լինեն սանտիմետրերով: Այդ դեպքում քանոն օգտագործվում է միայն ստացված կետերը հաջորդաբար (A, B, C, D) միացնելու համար:

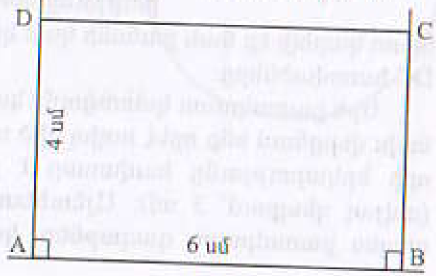
Տարրական դասարաններում ուսուցվում է նաև տրված երկու կողմերով ուղղանկյան կառուցումը անտող թղթի վրա: Վերը նշված խնդրի համար կունենանք.

1) Վերցնենք կամավոր ուղիղ և նրա վրա տեղադրենք տրված կողմերից մեկի երկարությունը՝ 6 սմ:

AB = 6 սմ: A և B կետերում կառուցենք ուղիղ անկյուններ, որոնց մյուս կողմի վրա տեղադրենք 4 սմ երկարությամբ հատված (նկ. 53):

Ստացված կետերը նշանակենք C–ով և D–ով: Միացնելով C և D կետերը՝ կստանանք ABCD որոնելի ուղղանկյունը:

2) Կամավոր ուղղի վրա տեղադրենք AB = 6 սմ հատվածը: A և B կետերը, որպես ուղիղ անկյան գագաթներ ծառայեցնե-



Նկ. 53

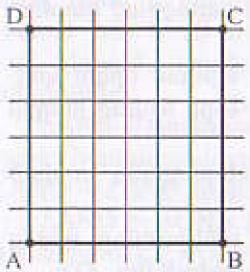
լով՝ կառուցենք ուղիղ անկյուններ՝ DAB և CBA: BC կողմի վրա տեղադրենք BC=4 սմ հատվածը: C գագաթում կառուցենք ևս մեկ ուղիղ անկյուն՝ DCB–ն: BAD և BCD ուղիղ անկյունների AD և CD կողմերը կհատվեն մեկ կետում՝ D–ում: Ստացված ABCD ուղղանկյունը կլինի որոնելին:

Տարրական դասարաններում քննարկվում են նաև կառուցման այնպիսի խնդիրներ, որոնցում ուղղանկյան կողմերի երկարությունները արտահայտված են բաղադրյալ անվանական թվերով: Օրինակ՝ կառուցել ուղղանկյուն՝ 3 սմ 5 մմ և 5 սմ 5 մմ երկարություն ունեցող կողմերով: Այդ պայմաններին բավարարող ուղղանկյունը ևս կառուցվում է վերոհիշյալ եղանակով:

§ 5.11. Քառակուսու կառուցումը

Քառակուսի կառուցելու համար աշակերտները պետք է յուրացրած լինեն, որ քառակուսին այն ուղղանկյունն է, որի 4 կողմերի երկարությունները հավասար են: Նրանք կարող են օգտվել ուղղանկյուն կառուցելու եղանակներից: Եթե կառուցումը տեղի է ունենում վանդակավոր թղթի վրա, ապա կարող են օգտվել վանդակներից կամ քանոնից:

Օրինակ՝ կառուցել քառակուսի, որի կողմի երկարությունը հավասար է 3 սմ–ի (նկ. 54):



Նկ. 54

Վերցնում ենք կամավոր A կետը և նրանից դեպի աջ և դեպի վերև, ուղիղ գծերի երկայնքով, հաշվում 6 վանդակ (3 սմ) ու նշում B ու D կետերը: Այնուհետև D կետից դեպի աջ (կամ B կետից դեպի վերև), ուղիղ գծի երկայնքով ևս հաշվում ենք 6 վանդակ (3 սմ), նշում C կետը: Հաջորդաբար (A, B, C, D) միացնելով նշված կետերը՝ ստանում ենք ABCD քառակուսին, որի կողմի երկարությունը հավասար է 3 սմ–ի: A կետն ընտրելուց հետո կարելի էր նաև քանոնի կամ կարկինի միջոցով տեղադրել AB, AD, DC հատվածները:

Եթե քառակուսու կառուցումը կատարվում է անտող թղթի վրա, ապա նախ վերցնում ենք որևէ ուղիղ գիծ ու նրա վրա տեղադրում մի հատված, որի երկարությունը հավասար է քառակուսու կողմի երկարությանը (տվյալ դեպքում՝ 3 սմ): Այնուհետև այդ հատվածի ծայրակետերում՝ որպես քառակուսու գագաթներ, կառուցում ենք ուղիղ անկյուններ ու

նրանց կողմերի վրա տեղադրում քառակուսու կողմի երկարությունը (ստացվում են A, B, C, D կետերը): Ստացված կետերը որոշակի հաջորդականությամբ միացնելով՝ ստանում ենք որոնելի քառակուսին:

§ 5.12. Շրջանագծի և շրջանի կառուցումը

Շրջանագծի և շրջանի կառուցումը բացատրվում է հենց այն ժամանակ, երբ գաղափար է տրվում դրանց մասին:

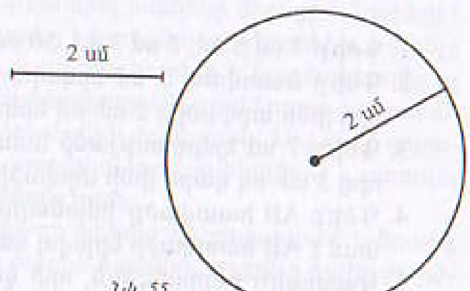
Շրջանագիծ գծելու համար աշակերտները պետք է կարողանան օգտվել կարկինից՝ նրան տալով համապատասխան բացվածք, կարկինի ոտքերն իրար ամրացնել այնպես, որ այդ բացվածքը չխախտվի: Ոտքերից մեկը՝ սուր ծայր ունեցողը, ամուր սեղմել գրատախտակին կամ տետրին, կարկինը պտտել դրա շուրջը և գծել:

Սկզբնական շրջանում կառուցվում է ցանկացած շառավղով շրջանագիծ: Այդ նպատակով ընտրվում է որևէ կետ (գրատախտակի վրա կամ տետրում), կարկինին տրվում է կամավոր բացվածք, սուր ծայրը դրվում է ընտրված կետում և ամուր սեղմվում, իսկ մյուս ծայրը (որին ամրացված է կավիճ կամ մատիտ) պտտվում է այդ կետի շուրջը (գրատախտակից կամ թղթից չկտրելով): Ստացված փակ կոր գիծն էլ կլինի շրջանագիծը, իսկ նրանով սահմանափակված մասը՝ շրջանը:

Հետագայում կոնկրետ կերպով տրվում է շրջանագծի շառավղի երկարությունը և պահանջվում է կառուցել շրջանագիծ: Օրինակ՝ կառուցել շրջանագիծ, որի շառավղի երկարությունը հավասար է 2 սմ–ի (նկ. 55):

Վերցնում ենք կամավոր O կետը՝ որպես շրջանագծի կենտրոն:

Կարկինին տալիս ենք 3 սմ երկարությամբ բացվածք, անփոփոխ թողնելով այն՝ կարկինի սուր ծայրը (ասեղնածայրը) դնում ենք O կետում և գծում շրջանագիծ:

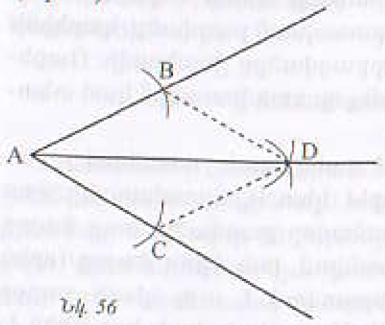


Նկ. 55

§ 5.13. Անկյան կիսորդի կառուցումը

Դասավարը հաճախ առօրյա կյանքում, արտադրատարածական պարապմունքներին, աշխատանքի ուսուցման դասերին հարկ է լինում կիսել տրված անկյունը: Այդ պատճառով էլ ավելորդ չենք համարում ցույց տալ, թե ինչպես կարելի է կառուցել տրված անկյան կիսորդը (կիսել տրված անկյունը):

Ենթադրենք՝ տրված է BAC անկյունը և պահանջվում է այն կիսել (նկ. 56):



Նկ. 56

A գագաթից՝ որպես կենտրոնից, գծում ենք ցանկացած շառավղով շրջանագիծ, որը B ու C կետերում հատում է BAC անկյան կողմերը: B և C կետերից նույն շառավղով կառուցում ենք շրջանագծեր, որոնք, բացի A կետից, հատվում են նաև D կետում: Միացնելով D և A կետերը՝ կստանք BAC անկյան կիսորդը: Իրոք, այդպես է, քանի որ $\Delta ABD = \Delta ACD$ (հավասարակողմ եռանկյուններ են), իսկ $\angle CAD = \angle DAB$՝ որպես համապատասխան անկյուններ:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ

1. Գծի՛ր 3 սմ 5 մմ, 2 սմ 3 մմ, 50 մմ երկարությամբ հատվածներ:
2. Գծի՛ր հատված՝ 5 սմ երկարությամբ: Կառուցի՛ր նոր հատված, որը լինի տրվածից 2 սմ–ով երկար:
3. Գծի՛ր 7 սմ երկարությամբ հատված: Գծի՛ր մեկ ուրիշ հատված, որը 3 սմ–ով կարճ լինի տրվածից:
4. Գծի՛ր AB հատվածը՝ իմանալով, որ AC հատվածը 3 սմ է և կազմում է AB հատվածի երրորդ մասը:
5. Կառուցի՛ր ուղղանկյուն, որի կողմերի երկարությունները հավասար են 5 սմ և 3 սմ:
6. Կառուցի՛ր ուղղանկյուն, որի կողմերի երկարությունները հավասար են 3 սմ 5 մմ և 5 սմ 3 մմ:
7. Ուղղանկյան երկարությունը 8 սմ է, իսկ լայնությունը՝ 2 անգամ փոքր: Կառուցի՛ր այդ ուղղանկյունը:

8. Ուղղանկյան լայնությունը 6 սմ է, իսկ երկարությունը՝ 2 անգամ ավելի: Կառուցի՛ր այդ ուղղանկյունը:
9. Կառուցի՛ր եռանկյուն, որի կողմերի երկարությունները հավասար են 5 սմ, 7 սմ, 4 սմ:
10. Կառուցի՛ր շրջանագիծ, որի շառավիղը հավասար է 5 սմ:

§ 6. ԱՇԱԿԵՐՏՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ՊԱՏԿԵՐԱՑՈՒՄՆԵՐԻ ԶԱՐԳԱՑՈՒՄԸ

Երեխաների տարածական պատկերացումները սկսում են ձևավորվել շատ վաղ հասակից, տարածության մեջ կողմնորոշվում են այսպես կոչված՝ զգայական համակարգի միջոցով: Տարածական պատկերացումների և տարածական կողմնորոշման ունակությունների ձևավորումը մասնակցում են տարբեր օրգաններ, սակայն կարևոր դեր են խաղում տեսողական օրգանները:

Նախադպրոցական հասակում երեխան տիրապետում է տարածական կողմնորոշման համակարգի որոշ բառերի՝ «առջև», «հետև», «վերև», «ներքև», «աջ», «ձախ»: Դպրոցական ուսումնառության տարիներին տիրապետում է նոր հասկացությունների՝ հյուսիս, հարավ, արևելք, արևմուտք, որոնք բնութագրում են հորիզոնի կողմերը: Առաջին դասարանում պետք է պարզաբանել, թե աշակերտը կարողանո՞ւմ է տարբերել աջ և ձախ ձեռքերը, կողմնորոշվո՞ւմ է իր նկատմամբ առարկաների դասավորվածության հարցում. իրենից աջ, ձախ, վերև, ներքև, իր առջև, իրենից հետ և այլն: Դա կարելի է կատարել խաղերի միջոցով: Կարելի է կազմակերպել «Կռահի՛ր, թե ով որտեղ է կանգնած», «Կռահի՛ր, թե ինչը որտեղ է գտնվում» և այլ խաղեր: Խաղերը կարելի է կազմակերպել ոչ միայն մաթեմատիկայի, այլ նաև ֆիզկուլտուրայի, երաժշտության դասերին, ինչպես նաև դասերից դուրս՝ զբոսանքի ժամանակ: Օրինակ՝ դպրոցի բակում կարելի է ընտրել որոշ առարկաներ (օբյեկտներ) և առուցել աշակերտների տարածական կողմնորոշումը:

Որևէ օբյեկտի մոտից կամ ինչ–որ կետից դեկավարվում է նրանց շարժումը. «Շարժվի՛ր ուղիղ, մինչև ծառին հասնելը, թեքվի՛ր ձախ, շարժվի՛ր ուղիղ, 10 քայլ կատարելուց հետո թեքվի՛ր աջ... և այլն»: Այսպիսի խաղերն օգնում են, որ երեխաները փոքր հասակից տիրապետեն փողոցն անցնելու ալգորիթմին:

Առաջին դասարանում աշակերտներից կարելի է պահանջել, որ տետրում ցույց տան որևէ քառակուսի (վանդակավոր տետրում), նրանից դուրս՝ ձախ կողմում (աջ կողմում, վերևում, ներքևում) նշեն մեկ կետ, նրա ներսում ցույց տան որևէ այլ կետ:

Ուշադրություն պետք է դարձնել, որ աշակերտները ճիշտ որոշեն մեկ առարկայի դիրքը մյուսի նկատմամբ: Այդ նպատակով սեղանին դասավորում են տարբեր առարկաներ ու իրեր և հարցերի միջոցով ստուգում աշակերտների տարածական պատկերացումները: Առարկաների, իրերի տեղերը փոխելով՝ նորից հարցեր են առաջադրում: Հավաքման պաստառի միևնույն շարքում կարելի է դասավորել կարմիր, կանաչ և կապույտ երեք շրջան ու հարցնել, թե կապույտ (կարմիր կամ կանաչ) շրջանը մյուսների նկատմամբ ինչպե՞ս է դասավորված: Կարելի է մի քանի աշակերտների շարք կանգնեցնել և հարցնել, թե նրանցից ով ինչ դիրք է գրավում մյուսների նկատմամբ (գտնվում է առջևում, հետևում) և այլն:

Երկրաչափական նյութի ուսուցման հենց սկզբնական շրջանում երեխաները սովորում են կողմնորոշվել երկչափ տարածությունում (հարթության վրա): Այդ աշխատանքը հաճախ կատարվում է այնպես, որ հետագայում երեխաներին դժվար է լինում կողմնորոշել եռաչափ տարածությունում: Որպեսզի դա տեղի չունենա, պետք է հենց սկզբից աշակերտներին ցույց տալ այն տարածական պատկերները (մարմինները), որոնց մի մասն է կազմում տվյալ հարթ պատկերը:

Եթե առաջին դասարանում աշակերտներին ցուցադրվում են տարածական մարմինները՝ գլանը, կոնը, քառանիստը, խորանարդը, ուղղանկյունանիստը և այլն, ու պահանջվում է շրջապատի առարկաներից, իրերից անվանել, առանձնացնել դրանց նմանները (արտաքինով), ապա հետագայում պետք է կապ ստեղծել դրանց և հարթ պատկերների միջև:

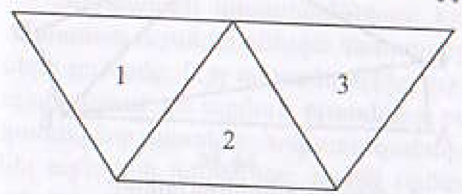
Օրինակ՝ ուղղանկյան մասին գաղափար տալուց հետո կարելի է ցույց տալ, որ դասարանի հատակը, առաստաղը, պատերը ունեն ուղղանկյան ձև: Կարելի է ցույց տալ զուգահեռանիստը ու նրա վրա՝ ուղղանկյունները, ցույց տալ խորանարդը, և նրա վրա քառակուսիները, ցույց տալ բուրգը և նրա նիստերը՝ որպես եռանկյուններ, իսկ հիմքը՝ որպես բազմանկյուն և այլն:

§ 7. ՊԱՏԿԵՐՆԵՐԸ ՃԱՆԱՉԵԼՈՒ, ՄԱՍԵՐԻ ԲԱԺԱՆԵԼՈՒ ԵՎ ԱՅԴ ՄԱՍԵՐԻՑ ՆՈՐ ՊԱՏԿԵՐՆԵՐ ԿԱԶՄԵԼՈՒ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Աշակերտների ճանաչողական ունակությունների, ինչպես նաև տարածական (հարթության վրա) պատկերացումների զարգացման խնդրով վարժություններ կան, որոնք պահանջում են տրված պատկերներից

անջատել այս կամ այն պատկերը (կամ պատկերների խումբը): Օրինակ՝ տրված գծագրի վրա գտնել 3 քառանկյուն: Յուրաքանչյուր քառանկյան համար նշել այն եռանկյունների համարները, որոնցից կազմված է:

Ոչ բոլոր աշակերտները կարող են անմիջապես նշել այդ քառանկյունները: Որպեսզի երեխաները հերքականությամբ ցույց տան դրանք, ավելի լավ կլինի, որ ներկեն տարբեր գույներով: Հաճախ նրանք չեն հասկանում, որ այդ քառանկյուններից մեկը հենց տրվածն է (նկ. 57):



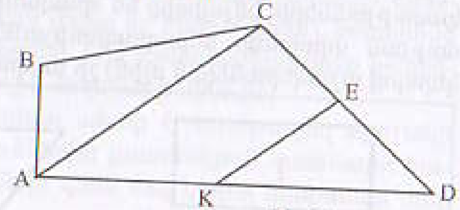
Նկ. 57

Տառային պայմանանշանների ներմուծումից հետո նման խնդիրների լուծման ժամանակ պետք է աշակերտներից պահանջել, որ անվանեն ու գրեն յուրաքանչյուր եռանկյուն և յուրաքանչյուր քառանկյուն:

Եթե երեխաները դժվարանում են այդ բովանդակությամբ խնդիրներ լուծելիս, ապա կարելի է բրիից պատրաստել պատկերը և անհրաժեշտության դեպքում բաժանել համապատասխան մասերի:

Ուրիշ օրինակ (նկ. 58):

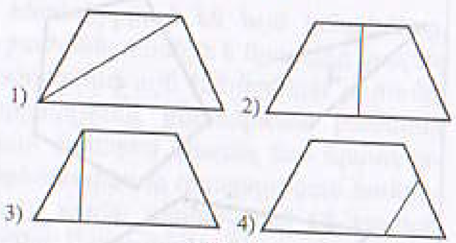
Տրված գծագրի վրա ցույց տուր 3 եռանկյուն, մեկ քառանկյուն և մեկ հնգանկյուն: Գրի՛ր այդ պատկերների անվանումները: Աստիճանաբար այս բովանդակությամբ խնդիրները ավելի բարդացվում են:



Նկ. 58

Օրինակ (նկ. 59)՝ տրված քառանկյունը մեկ հատվածի միջոցով բաժանի՛ր այնպես, որ ստացվի

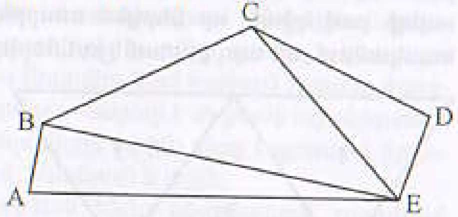
1) երկու եռանկյուն,
2) երկու քառանկյուն,
3) մեկ քառանկյուն և մեկ եռանկյուն,
4) մեկ եռանկյուն և մեկ հնգանկյուն:



Նկ. 59

Այս բովանդակությամբ խնդիրները լուծելու համար լավ կլինի, որ աշակերտներն ունենան նախօրոք պատրաստած, իրար հավասար պատկերներ (տվյալ դեպքում՝ քառանկյուններ): Դա հնարավորություն կտա, որ կտրեն ու առանձնացնեն որոնելի պատկերները: Այդպիսի պատկերներ կարելի է պատրաստել աշխատանքի ուսուցման դասերին: Գործնական բնույթի այսպիսի խնդիրների լուծումը աշակերտներին պատկերացում է տալիս պատկերների հավասարության մասին, նախապայմաններ ստեղծում մակերեսների ուսուցման համար:

Անկյան մասին աշակերտների պատկերացումները ամրապնդելու նպատակով կարելի է քննարկել հետևյալ բովանդակությամբ վարժություններ (նկ. 60):



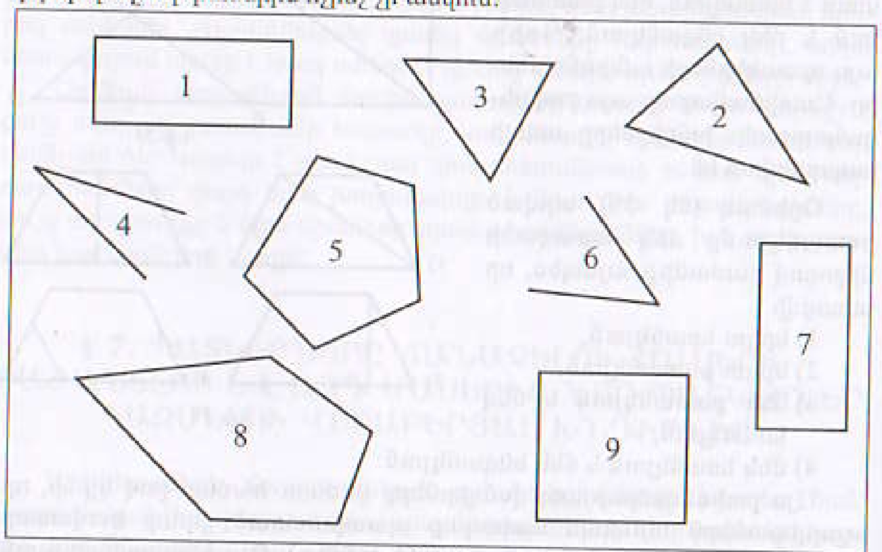
Նկ. 60

1) Անվանենք A անկյունը չպարունակող բազմանկյունները:

2) Անվանենք D անկյունը պարունակող բազմանկյունները:

3) Անվանենք E գագաթ ունեցող բոլոր եռանկյունները:

Ավելի ուշադրավ են այն վարժությունները, որոնք պահանջում են անվանել նկարում տրված պատկերները: Այդ բովանդակությամբ խնդիրների լուծման ժամանակ հանդիպում են այնպիսի մաթեմատիկական հասկացությունների, ինչպիսիք են «բազմություն», «ենթաբազմություն», «բազմության տրոհումը ենթաբազմությունների», որոնց մասին բացահայտ կերպով աշակերտներին ոչինչ չի ասվում:



Նկ. 61

Օրինակ՝ նայի՛ր նկարին և անվանի՛ր (նկ. 61).

1) անկյունները,
2) եռանկյունները,
3) քառանկյունները,
4) հնգանկյունները,
5) ուղղանկյունները,
6) քառակուսիները:

Ընդհանրապես, երկրաչափական նյութի ուսուցման ժամանակ անհրաժեշտ է ունենալ համապատասխան զննական պարագաներ:

Տարրական դասարաններում երկրաչափական նյութի ուսուցման ժամանակ աշակերտներին հետաքրքրում է գործնական բնույթի խնդիրների լուծումը: Այդ տեսանկյունից ուշադրավ են այն խնդիրները, որոնք պահանջում են տրված պատկերը բաժանել մասերի, և այդ մասերից կազմել նոր պատկեր: Նպատակահարմար է սկզբնական փուլում քննարկել այնպիսի խնդիրներ, որոնց լուծման ժամանակ շատ հեշտությամբ տրոհված պատկերի մասերի միացումից ստացվում է նույն պատկերը: Օրինակ՝ տրված քառակուսին տրոհել երկու եռանկյունների: Այդ եռանկյուններից կազմել մեկ քառակուսի:

Հետագայում այդ տիպի խնդիրների բովանդակությունը բարդացվում է: Օրինակ՝ տրված ուղղանկյունը բաժանել երկու այնպիսի մասերի, որոնցից յուրաքանչյուրը լինի քառանկյուն (բայց ոչ՝ ուղղանկյուն), ստացված պատկերներից կազմել նոր պատկերներ: Այդ բովանդակությամբ խնդիրների լուծումը պետք է բացատրել թղթե մոդելների միջոցով:

Որոշ խնդիրների լուծման համար պետք է առաջադրել որոշակի պայման: Օրինակ՝ երկու եռանկյուններից քառանկյուն ստանալու համար անհրաժեշտ է, որ նրանցից մեկի գոնե մեկ կողմը հավասար լինի մյուսի մեկ կողմին:

Աշակերտներին առանձնակի հետաքրքրում են այն խնդիրները, որոնք պահանջում են քառակուսին բաժանել մասերի և նրանցից կազմել նոր պատկերներ: Ավելի հեշտ է յուրացվում այն խնդիրների լուծումը, որոնք պահանջում են տրված ուղղանկյունը, քառակուսին բաժանել երկու հավասար մասերի և ստացված մասերով կազմել նոր պատկերներ: Տարրական դասարանների մաթեմատիկայի դասընթացում հանդիպում ենք նաև այնպիսի խնդիրների, որոնք պահանջում են տրված պատկերներից կազմել նոր պատկերներ: Այդ բովանդակությամբ խնդիրները լուծելու համար աշակերտները պետք է ունենան թղթից պատրաստված համապատասխան պատկերներ: Հետագայում կարելի է պահանջել, որ նրանք այդ բովանդակությամբ խնդիրների լուծումը կատարեն գծագրի վրա:

§ 8. ՊԱՐԱԳԾԵՐԻ ԵՎ ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՑՈՒՄԸ

§ 8.1. Պարագծերի ուսուցումը

Դեռևս հատվածների երկարությունները գումարելիս աշակերտներին պետք է սովորեցնել, որ բացի տրված հատվածների երկարությունները արտահայտող թվերի գումարումից կարելի է նաև միևնույն ուղղի վրա հատվածների ծայրերն իրար կցել և ստանալ մեկ հատված, որի երկարությունը հավասար կլինի տրված հատվածների երկարությունների գումարին: Աշակերտների մեջ պետք է աստիճանաբար ձևավորել երկարությունները գումարելու կարողությունը: Նրանք պետք է հասկանան, որ երկու հատվածների գումարը նոր հատված է, որի ստացումը կապված չէ տրված հատվածների երկարությունների չափման հետ:

Բեկյալ գծի մասին գաղափար տալուց հետո հեշտությամբ կարելի է բացատրել նրա երկարությունը գտնելու հարցը, քանի որ բեկյալը բաղկացած է հատվածներից, իսկ հատվածների երկարությունները աշակերտները կարող են չափել:

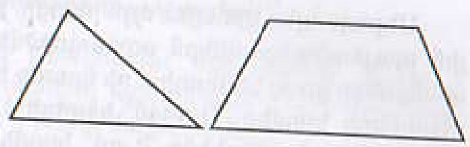
Վերցնելով կոնկրետ բեկյալ (փակ և բաց) գծի պատկերներ՝ բացատրվում է, թե յուրաքանչյուրը քանի հատվածից է բաղկացած և չափելով՝ որոշվում է յուրաքանչյուր հատվածի երկարությունը:

Գումարելով ստացած թվերը՝ իմանում ենք տվյալ բեկյալ գծի երկարությունը: Փորձը ցույց է տալիս, որ աշակերտները հեշտությամբ են յուրացնում հարցի իմաստը, սակայն որոշ դժվարություններ են առաջանում հատվածների երկարությունները չափելիս (քանոնից ոչ բոլորն են ճիշտ օգտվում):

Աշակերտների ստացած գիտելիքներն ամրապնդելու, նրանց ունակությունները զարգացնելու նպատակով պետք է քննարկել բեկյալ գծի երկարությունը գտնելու վերաբերյալ մի շարք վարժություններ:

Փակ բեկյալ գծի մասին գաղափար տալիս պետք է աշակերտների մեջ ստեղծել այն պատկերացումը, որ այն բազմանկյան եզրագիծն է: Երկրաչափական պատկերների պարագիծը գտնելու վերաբերյալ խնդիրների լուծման սկզբնական շրջանում «պարագիծ» տերմինը կարելի է չօգտագործել: Նպատակահարմար է այն փոխարինել «պատկերի բոլոր կողմերի երկարություն» արտահայտությամբ: Օրինակ՝ գտնել տրված եռանկյան, քառանկյան բոլոր կողմերի երկարությունների գումարը (նկ. 62):

Հետագայում պետք է տրվի պարագծի սահմանումը՝ **բազմանկյան բոլոր կողմերի երկարությունների գումարը կոչվում է պարագիծ:**


Նկ. 62

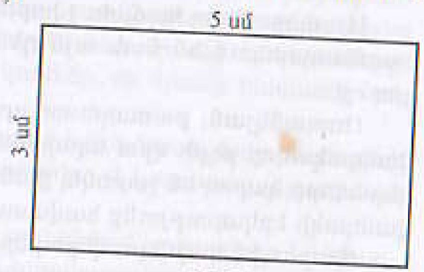
Որպեսզի ամրապնդվի այդ սահմանումը, պետք է քննարկել վարժություններ, որոնք պահանջում են գտնել այս կամ այն հարթ պատկերի պարագիծը: Յուրաքանչյուր պատկերի պարագիծը հաշվելիս պետք է առաջարկել հետևյալ բովանդակությամբ հարցեր.

1) բազմանկյան պարագիծ ասելով՝ ի՞նչ ենք հասկանում,
2) եռանկյան պարագիծն ինչի՞ է հավասար,
3) քառանկյան պարագիծն ինչի՞ է հավասար և այլն:

Մաթեմատիկայի տարրական դասընթացում լուրջ տեղ է հատկացվում ուղղանկյան և քառակուսու պարագծերը հաշվելուն: Նախ պետք է երկարությունները չափելու միջոցով. չափել կողմերի երկարությունները և ստացված թվերը գումարել:

Օրինակ՝ կառուցել ուղղանկյուն՝ 5 սմ և 3 սմ երկարություն ունեցող կողմերով և գտնել պարագիծը (նկ. 63):

Չափելով կողմերի երկարությունները՝ աշակերտները գրում են.
5 սմ + 3 սմ + 5 սմ + 3 սմ = 16 սմ:



Նկ. 63

Նման աշխատանք է տարվում քառակուսու պարագիծը հաշվելիս:

Հետագայում ուղղանկյան պարագիծը հաշվելիս պետք է օգտվել նրա կողմերի հատկությունից. հանդիպակաց կողմերն իրար հավասար են: Բացատրվում է, որ ուղղանկյան պարագիծը գտնելու համար բավական է գումարել իրար ոչ հանդիպակաց (կից) երկու կողմերի երկարությունները և ստացված արդյունքը բազմապատկել երկուսով:

Վերոհիշյալ խնդրի համար կունենանք.

$(5 + 3) \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16$ կամ

$5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 10 + 6 = 16$

Քառակուսու պարագիծը հաշվելիս կարելի է նրա մեկ կողմի երկարությունը բազմապատկել 4–ով:

Մեթոդապես վիճելի է այն հարցը, թե պարագծերը հաշվելիս տառային պայմանանշաններն օգտագործվե՞ն, թե՞ ոչ: Փորձնական աշխատանքները ցույց են տալիս, որ դրանք հեշտությամբ են յուրացվում աշակերտների կողմից: Ուրեմն՝ կարելի է օգտագործել: Եթե ուղղանկյան պարագիծը նշանակենք P–ով, կողմերի երկարությունը՝ a–ով և b–ով, ապա կստացվի.

$P = (a + b) \cdot 2$

Քանի որ քառակուսու համար $a = b$, ապա կունենանք՝ $P = 4a$, որտեղ a–ն քառակուսու կողմի երկարությունն է:

Դասագրքերում հանդիպում են այնպիսի վարժություններ, որոնք պահանջում են գտնել հավասարակողմ եռանկյան պարագիծը (չափելով եռանկյան բոլոր կողմերի երկարությունները՝ երեխաները հայտնաբերում են, որ դրանք իրար հավասար են): Նպատակահարմար է, որ աշակերտներն իմանան. այդ դեպքում բավական է մեկ կողմի երկարությունը բազմապատկել 3–ով: Պետք է կատարել այսպիսի գրառում. 5 սմ + 5 սմ + 5 սմ = 15 սմ, որտեղ 5 սմ–ը եռանկյան կողմի երկարությունն է:

Գումարման գործողությունը փոխարինելով բազմապատկումով՝ կստացվի.

5 սմ . 3 = 15 սմ

Աշակերտները հաճախ շփոթում են, մեկ կողմի երկարությունը 3–ով բազմապատկում են նաև այն դեպքում, երբ եռանկյունը հավասարակողմ չէ:

Ուղղանկյան, քառակուսու պարագծերը որոշելիս պետք է օգտվել վանդակավոր թղթի վրա նկարված պատկերներից: Այդ դեպքում աշակերտները կարող են չօգտվել քանոնից: Նրանք արդեն գիտեն, որ երկու վանդակի երկարությունը հավասար է 1 սմ–ի:

Պարագիծ հաշվելու վերաբերյալ խնդիրների ուսուցման ընթացքում կարելի է գործնական աշխատանքներ կատարել տեղանքում: Այդ նպատակով պետք է վերցնել երկու անշարժ օբյեկտ, կավիճով նշել մեկից մյուսին անցնելու տարբեր ճանապարհներ, որոնք բաղկացած լինեն հատվածներից: Աշակերտներից երկուսին (կամ երեքին, եթե նշվել է 3 ճանապարհ) առաջարկել, որ երկու օբյեկտների միջև եղած հեռավորությունն անցնեն նշված ճանապարհներով: Այնուհետև պարզաբանել, թե նշված ճանապարհներից որն է ամենակարճը, որն է ամենաերկարը:

Այդպիսի աշխատանքները նպաստում են, որ աշակերտները գործնականորեն կիրառեն իրենց ստացած գիտելիքներն ու ձեռք բերեն տեղանքում չափումներ կատարելու ունակություններ:

§ 8.2. Մակերեսների ուսուցումը

Մակերեսի հասկացությունը ձևավորելու նպատակով պետք է աշակերտներին ցուցադրել շրջապատող առարկաների՝ գրատախտակի, սեղանի, դասարանի հատակի և այլնի մակերեսները:

«Մակերես» տերմինը ներմուծելու համար կարելի է կատարել հետևյալ բովանդակությամբ գործնական աշխատանք: Աշակերտներին ցուցադրել ուղղանկյան և եռանկյան պատկերները: Դրանք ընտրել այնպես, որ եռանկյունը ամբողջությամբ տեղավորվի ուղղանկյան վրա: Հարցնել, թե ի՞նչ երկրաչափական պատկերներ ենք վերցրել, ո՞ր պատկերն է որի վրա տեղադրվել, ո՞ր պատկերի մակերեսն է մեծ: Նշվում է, որ եռանկյան մակերեսն ավելի փոքր է, քանի որ ամբողջությամբ տեղադրվել է ուղղանկյան մեջ: Նույն աշխատանքը կարելի է կատարել՝ վերցնելով երկու ուրիշ հարթ երկրաչափական պատկերներ:

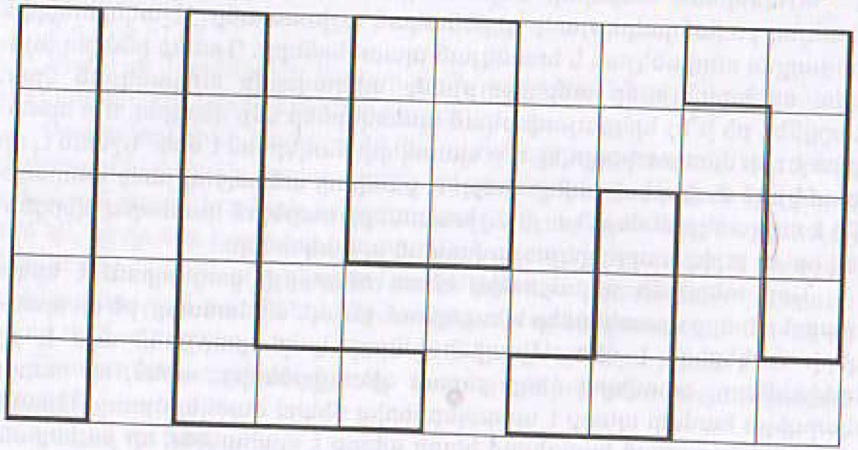
Նոր տերմինի յուրացումից հետո ուսուցիչը ցուցադրում է երկու տարբեր հարթ պատկերներ և հարցնում. ինչպե՞ս իմանանք, թե որ պատկերի մակերեսն է մեծ: Այսպիսի հարցի կարևորությունն այն է, որ երեխաները, օգտվելով ձեռք բերած գիտելիքներից, ասեն, որ հարցը պարզելու համար պետք է պատկերներից մեկով ծածկել մյուսը: Այսպիսի եզրակացության հանգելուց հետո պետք է պահանջել, որ յուրաքանչյուր աշակերտ երկրաչափական հարթ պատկերների հավաքածուից վերցնի կամավոր երկու պատկեր և համեմատի նրանց մակերեսները: Եթե պատկերները համընկնեն, ապա կասենք, որ նրանք հավասար են, եթե չհամընկնեն՝ հավասար չեն:

Հետագայում ուսուցիչը առաջարկում է համեմատել երկու այնպիսի պատկերների մակերեսները, որոնք հնարավոր չէ կատարել վերադրման միջոցով:

Փաստորեն, աշակերտների համար ստեղծվում է պրոբլեմային իրադրություն: Նրանք չեն կարողանում տալ առաջադրված հարցի պատասխանը: Ուսուցիչը ցուցադրում է այդ պատկերների հակառակ երեսը, որտեղ պատկերված է նրանց բաժանումը հավասարամեծ քառակուսիների: Այդ ցուցադրումից հետո աշակերտները կարող են ասել, որ պետք է հաշվել քառակուսիները և համեմատել արդյունքները. որ պատկերը շատ քառակուսիներ է պարունակում, նրա մակերեսն էլ մեծ է:

Այս աշխատանքի կարևորությունն այն է, որ երեխաները նախապատրաստվում են մակերեսների չափման միավորների ուսուցմանը, նրանք զգում են այդ միավորների ներմուծման կարիքը:

Աշակերտների ստացած գիտելիքներն ամրապնդելու համար կարելի է առաջարկել, որ նրանք համեմատեն քառակուսային թղթի վրա պատկերված պատկերների մակերեսները և գրեն նրանց համարները՝ ըստ մակերեսների աճման: Աշխատանքի արդյունքում երեխաները պետք է համոզվեն, որ պատկերները արտաքնապես կարող են լինել տարբեր, բայց ունենալ հավասար մակերես (№ 1 և № 5 պատկերները) (նկ. 64):



Նկ. 64

Գործնական աշխատանքների, խնդիրների, վարժությունների լուծման միջոցով ուսուցիչը պետք է աշակերտներին հասկացնի, որ չափել մակերեսը նշանակում է իմանալ, թե տվյալ պատկերի մակերեսը քանի՞ քառակուսի միավոր է պարունակում (կամ՝ համեմատել նրա մեծությունը չափման միավորի հետ):

Մակերեսների չափումը տարրական դպրոցում տեղի է ունենում երկու եղանակով.

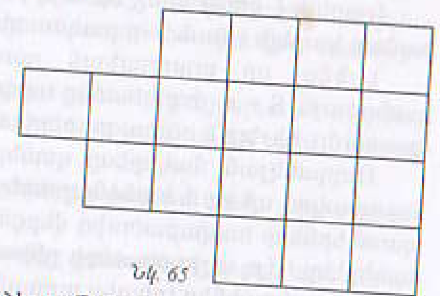
1. Ուղղակի, որը կատարվում է պալետի միջոցով, և ստացվում է պատկերի մակերեսի մեծության մոտավոր արժեքը:
2. Անուղղակի, երբ չափում են պատկերի գծային տարրերի երկարությունը և օգտվում պատկերի մակերեսը հաշվելու կանոնից: Այդ եղանակով հաշվում են ուղղանկյան և քառակուսու մակերեսները:

Մակերեսի չափման միավորներից առաջինն ուսուցվում է քառակուսի սանտիմետրը: Քառակուսի սանտիմետրի՝ որպես մակերեսի չափման միավորի մասին, աշակերտներին պատկերացում տալու նպատակով ուսուցիչը պահանջում է, որ նրանք վանդակավոր (կամ անտող) թղթի

վրա գծեն մեկ սանտիմետր երկարություն ունեցող կողմով քառակուսի և այն թղթից կտրեն, առանձնացնեն: Այդ աշխատանքը կարելի է հանձնարարել ինչպես տանը, այնպես էլ դասարանում՝ դասի ժամանակ: Ուսուցիչը, ցուցադրելով այդպիսի քառակուսու մոդելը, ասում է, որ դա մեկ քառակուսի սանտիմետրն է: Աշակերտները պետք է հասկանան, որ մեկ քառակուսի սանտիմետրը այնպիսի քառակուսու մակերեսն է, որի կողմի երկարությունը հավասար է մեկ սանտիմետրի:

Քառակուսի սանտիմետրի մասին գաղափարը տալուց հետո ուսուցիչը ցույց է տալիս, թե «քառակուսի սանտիմետր» բառերի մոտ կրճատ ինչպես է գրվում՝ 5 սմ², 7 սմ² և այլն:

Այնուհետև աշակերտներից պետք է պահանջել, որ քառակուսի սանտիմետրի մոդելների (յուրաքանչյուր աշակերտ պետք է ունենա մի քանի մոդելներ) միջոցով կազմեն պատկերներ և ասեն, թե դրանց մակերեսը քանի՞ քառակուսի սանտիմետր է պարունակում: Կարելի է նաև համեմատել, որ նրանք քառակուսու մոդելի միջոցով չափեն կանոնավոր տեսք ունեցող (որոնց գծային երկարությունները արտահայտվում են ամբողջ թիվ սանտիմետրերով) պատկերի մակերեսը: Օրինակ՝ չափել ուղղանկյան մակերեսը, որի երկարությունը հավասար է 4 սմ–ի, իսկ լայնությունը՝ 1 սմ–ի: Կատարելով այդ աշխատանքը՝ նրանք համոզվում են, որ այդ պատկերի մակերեսը հավասար է 4 սմ²: Հետագայում այդ աշխատանքը կարելի է ավելի բարդացնել: Օրինակ՝ պահանջել, որ աշակերտները հաշվեն, թե քանի՞ քառակուսի սանտիմետրի է տրոհված տվյալ պատկերի մակերեսը: Աշակերտները հաշվելով իմանում են, որ պատկերի մակերեսը պարունակում է 18 սմ² (նկ. 65):

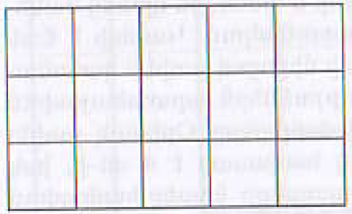


Նկ. 65

Լավ կլինի, որ աշակերտները կատարեն գրառում՝ $3+5+6+4=18$ (սմ²), որը նրանց կնախապատրաստի ուղղանկյան մակերեսը գտնելուն:

Կատարվող գործնական աշխատանքի բովանդակությունն ավելի հետաքրքիր դարձնելու նպատակով կարելի է առաջարկել, որ աշակերտները դրոշեն տրված պատկերների մակերեսները և պարագծերը: Պետք է ուշադրություն դարձնել այն դեպքի վրա, երբ պատկերներն ունեն հավասար մակերես, բայց տարբեր պարագիծ: Աշակերտները պետք է նկատեն, որ պարագիծը արտահայտվում է գծային միավորներով, իսկ մակերեսը՝ քառակուսային:

Օգտվելով պատկերների մակերեսները քառակուսի սանտիմետրերի տրոհելու՝ աշակերտների ունեցած կարողություններից՝ պարզաբանվում է, թե ինչպե՞ս կարելի է հաշվել ուղղանկյան մակերեսը: Այդ նպատակով ուսուցիչը պահանջում է, որ աշակերտները տետրերում գծեն ուղղանկյուն, որի երկարությունը հավասար լինի 5 սմ–ի, իսկ լայնությունը՝ 3 սմ–ի, և այն տրոհեն քառակուսի սանտիմետրերի (նկ. 66): Նույն աշխատանքը ուսուցիչը կատարում է գրատախտակի վրա և բացատրում, թե տրված ուղղանկյունը ինչպե՞ս կարելի է բաժանել քառակուսիների: Հաշվելով քառակուսիների թիվը՝ պարզվում է, որ այդ ուղղանկյան մակերեսը պարունակում է 15 սմ²: Զրույցի միջոցով ուսուցիչը պարզաբանում է, որ այդ քառակուսիների թիվը կարելի է հաշվել հետևյալ կերպ. նախ իմանալ, թե մեկ շերտը քանի՞ քառակուսի սանտիմետր է պարունակում (5 սմ²) և քանի՞ այդպիսի շերտ կա:



Նկ. 66

Պարզվում է, որ կա 3 շերտ, յուրաքանչյուրն էլ պարունակում է 5 սմ²: Ուրեմն, ամբողջ ուղղանկյան մակերեսը կպարունակի $5սմ^2 + 5սմ^2 + 5սմ^2 = 15սմ^2$, որը կարելի է կրճատ գրել $5 \cdot 3 = 15$ (սմ²): Նշվում է, որ 5–ը ուղղանկյան երկարությունն արտահայտող թիվն է, իսկ 3–ը՝ լայնությունը: Ուրեմն, եթե ուղղանկյան երկարությունը բազմապատկենք լայնությունով, ապա ստացված թիվը ցույց կտա ուղղանկյան մեջ պարունակվող քառակուսիների թիվը (տվյալ դեպքում՝ քառակուսի սանտիմետրերի թիվը):

Կարելի է ցույց տալ, որ այդ նույն ուղղանկյան մակերեսը գտնելու համար կարելի է նաև 3–ը բազմապատկել 5–ով:

Նշենք, որ տարրական դասարաններում գործող ծրագրերի համաձայն՝ $S = a \cdot b$ բանաձևը տրվում է: Մեր կարծիքով՝ այդ բանաձևի գրառումը, հիշելը և օգտագործելը աշակերտների համար դժվար չի լինի:

Ուղղանկյան մակերեսը գտնելու կարողություններն ամրապնդելու նպատակով պետք է հանձնարարել, որ աշակերտները երկրաչափական պատկերների հավաքածուից վերցնեն ուղղանկյունները և որոշեն նրանց մակերեսը: Այդ աշխատանքի ընթացքում աշակերտներին կարելի է տալ նաև քառակուսիներ (որպես ուղղանկյան մասնավոր դեպք) և պահանջել, որ հաշվեն դրանց մակերեսը: Երեխաներն արդեն գիտեն, որ քառակուսու բոլոր կողմերի երկարություններն իրար հավասար են, ուստի մակերեսը որոշելու համար բավական է իմանալ մեկ կողմի երկարությունը և ստացված արդյունքը բազմապատկել իրենով:

Որպեսզի երեխաները չշփոթեն ուղղանկյան և քառակուսու մակե-

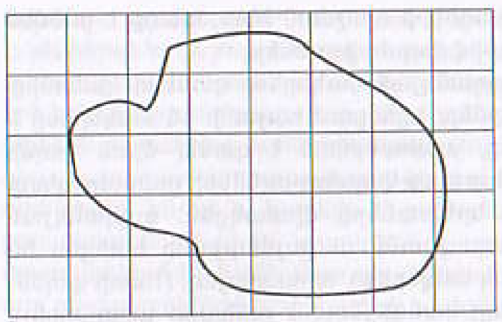
րեսների որոշումը դրանց պարագծերի որոշման հետ, պետք է լուծվեն այդ բովանդակությամբ բազմաթիվ վարժություններ:

Հետագայում օգտվելով ուղղանկյան մակերեսը գտնելու կանոնից՝ պետք է լուծել այնպիսի խնդիրներ, որոնցում հայտնի են մակերեսը և կողմերից մեկի երկարությունը, պահանջվում է գտնել մյուս կողմի երկարությունը: Այդ բովանդակությամբ վարժությունների լուծումը պետք է պարզաբանել այնպես, որ երեխաները գիտակցեն. ուղղանկյան մակերեսը որոշելիս նրա երկարությունն ու լայնությունը հանդես են գալիս որպես արտադրիչներ, իսկ մակերեսը՝ արտադրյալ: Ուստի կողմերից մեկի երկարությունը գտնելը հանգեցնում է անհայտ արտադրիչը գտնելու կանոնին, որը երեխաներն արդեն գիտեն: Այս աշխատանքից հետո երեխաները եզրակացնում են, որ ուղղանկյան կողմերից մեկի երկարությունը գտնելու համար, երբ հայտնի են մյուս կողմի երկարությունը և մակերեսը, բավական է մակերեսի մեծությունը բաժանել հայտնի կողմի երկարության վրա:

Տարրական դպրոցում աշակերտները ծանոթանում են պալետին և օգտվում նրանից՝ տարբեր ձև ունեցող պատկերների մակերեսները հաշվելու համար: Ուսուցիչը կարող է աշակերտներին հաղորդել, որ բացի ուղղանկյան ձև ունեցող պատկերների մակերեսներից, կարող ենք հաշվել նաև շրջանի, եռանկյան, ցանկացած բազմանկյան և ցանկացած տեսք ունեցող հարթ պատկերի մակերեսը, եթե օգտվենք հատուկ սարքից, որն անվանում են պալետ: Դա քառակուսիների բաժանված թափանցիկ թիթեղ է: Ուսուցիչը ցուցադրում է պալետը և աշակերտներին տալիս նախօրոք պատրաստված պալետներ: Գործնական աշխատանքների միջոցով երեխաները տիրապետում են դրանից օգտվելու ալգորիթմին: Այդ ալգորիթմն է.

1. պալետով ծածկել այն պատկերը, որի մակերեսը պետք է հաշվել,
2. իմանալ, թե պալետի քառակուսիներից քանիսն են լրիվ կերպով տեղավորվում տվյալ պատկերի վրա,
3. իմանալ, թե պալետի քառակուսիներից քանիսն են ոչ լրիվ տեղավորվում տվյալ պատկերի վրա,
4. երրորդ կետում ստացված արդյունքը բաժանել երկուսի և մնացորդը անտեսել,
5. գումարել 2–րդ և 4–րդ կետերում ստացված արդյունքները:

Օրինակ՝ հաշվել տրված պատկերի մակերեսը (քառակուսի սանտիմետրերով) (նկ. 67):



Նկ 67

1. Պալետով ծածկում ենք պատկերը:
2. Պալետի քառակուսիներից պատկերի վրա լրիվ տեղավորված են 8-ը:
3. Ոչ լրիվ տեղավորված քառակուսիների թիվը 18-ն է:
4. 18 : 2 = 9 (սմ²)
5. Տրված պատկերի մակերեսը պարունակում է 8+9=17 (սմ²):

Քառակուսի դեցիմետրի և քառակուսի մետրի հասկացությունները ուսուցվում են նույն մեթոդով, ինչ որ քառակուսի սանտիմետրինը: Ուսուցիչը նախօրոք պատրաստում է դրանց մոդելները, իսկ աշակերտներից պահանջում է, որ գծեն քառակուսի, որի կողմի երկարությունը հավասար լինի մեկ դեցիմետրի (մեկ մետրի) և թղթից կտրեն, առանձնացնեն:

Աշակերտները պետք է հասկանան, որ մեկ քառակուսի դեցիմետրը այնպիսի քառակուսու մակերես է, որի կողմի երկարությունը հավասար է մեկ դեցիմետրի, իսկ մեկ քառակուսի մետրը՝ այնպիսի քառակուսու մակերես է, որի կողմի երկարությունը հավասար է մեկ մետրի: Մակերեսի չափման այդ միավորների ներմուծման անհրաժեշտությունը պետք է կապել մեծ մակերեսների (գրատախտակի, դասարանի հատակի և այլն) չափման հետ:

Քառակուսի դեցիմետրը տրոհելով քառակուսի սանտիմետրերի, իսկ քառակուսի մետրը՝ քառակուսի դեցիմետրերի՝ աշակերտները, հաշվելով ստացված քառակուսիների թիվը, համոզվում են, որ 1 դց² = 100 սմ², 1 մ² = 100 դմ² = 10000 սմ²:

Սովորաբար աշակերտները մակերեսի չափման միավորները ավելի դժվար են յուրացնում, քան երկարության չափման միավորները: Դա կարելի է բացատրել նրանով, որ.

1. քառակուսային միավորներն ուսուցվում են գծային միավորներից հետո, և նրանց անվանումներն ունեն որոշ նմանություն, որն էլ շփոթեցնում է երեխաներին,
2. քառակուսային միավորներով միշտ հնարավոր չէ մակերեսները չափել ուղղակի ձևով, իսկ գծային միավորներով միշտ էլ հնարավոր է հեռավորությունները չափել ուղղակի ձևով,
3. աշակերտներն ավելի շատ օգտվում են գծային միավորներից, քան՝ քառակուսային (ավելի հաճախ չափում են երկարությունները, քան մակերեսները):

Այս դժվարությունները հաղթահարվում են նպատակասլաց վարժությունների, խնդիրների լուծման և գործնական աշխատանքներ կատարելու միջոցով: Հենց գործնական աշխատանքների միջոցով աշակերտները պետք է համոզվեն, որ.

1. եթե պատկերը բաժանված է մասերի, ապա ամբողջ պատկերի մակերեսը հավասար է այդ մասերի մակերեսների գումարին,
2. պատկերի մակերեսի մեծությունը կախված չէ հարթության վրա նրա գրաված դիրքից,
3. մակերեսները կարելի է համեմատել և իմանալ՝ ո՞րն է մեծ, ո՞րը փոքր և որո՞նք՝ իրար հավասար,
4. պատկերները կարող են ունենալ տարբեր ձև, բայց նրանց մակերեսները պարունակեն հավասար թվով քառակուսի միավորներ: Այդ դեպքում ասում են, որ պատկերների մակերեսներն իրար հավասար են,
5. համընկնելի պատկերներն ունեն հավասար մակերեսներ:

Թեմայի ուսուցման արդյունքում աշակերտները պետք է ունենան կոնկրետ պատկերացում մակերեսի, նրա չափման միավորների մասին:

Երկրաչափական նյութի ուսուցման արդյունքում աշակերտները պետք է կարողանան.

1) տարբերել հատվածը ուղղից, չափել տրված հատվածի երկարությունը, կառուցել տրված երկարությամբ հատված,
2) տարբերել ուղիղ և ոչ ուղիղ անկյունները, ուղղանկյունը և քառակուսին, շրջանը և շրջանագիծը, եռանկյունների տեսակները,
3) կառուցել իրենց ծանոթ հարթ երկրաչափական պատկերները՝ քառակուսի, ուղղանկյուն, շրջանագիծ և այլն,
4) ճիշտ օգտվել տառային պայմանանշաններից՝ երկրաչափական պատկերները նշանակել տառերով ու անվանել,
5) օգտվել պարզագույն գործիքներից՝ հատվածների երկարությունները չափելու և համեմատելու, երկրաչափական պատկերներ կառուցելու ժամանակ,
6) հաշվել բեկյալ գծի երկարությունը, բազմանկյան պարագիծը,
7) լուծել խնդիրներ, որոնք պահանջում են որոշել ուղղանկյան կողմերից մեկի երկարությունը, եթե հայտնի են մյուս կողմի երկարությունը և մակերեսը,
8) հաշվել ուղղանկյան և քառակուսու մակերեսը քառակուսի սանտիմետրերով, քառակուսի դեցիմետրերով և քառակուսի մետրերով,
9) օգտվել պալետից՝ ցանկացած ձև ունեցող հարթ պատկերի մակերեսը անմիջականորեն չափելու համար,
10) անսխալ կերպով երկարության և մակերեսների չափման մեկ միավորից անցնել մյուսին:

ՀԱՎԵԼՎԱԾ 1

ԹՎԱԲԱՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ՊԱՏՄՈՒԹՅՈՒՆԻՑ

Ոչ ոք չգիտի, թե առաջին անգամ երբ է հայտնվել թիվը, և երբ են սկսել համրանքը: Բայց մի քանի տասնյակ հազար տարի առաջ մարդիկ հավաքում էին պտուղներ, որսում վայրի գազաններ, զբաղվում ձկնորսությամբ, պատրաստում էին քարե դանակներ և կացիններ: Եվ նրանց հարկավոր էր իմանալ, թե բավակա՞ն է ավարը մինչև հաջորդ որսը, շա՞տ են ձուկ բռնել: Հարկավոր էր հավաքած պտուղները բաժանել: Ուրեմն, զբաղվելով որսորդությամբ, ձկնորսությամբ, պտուղներ և սունկ հավաքելով՝ մարդիկ հանդիպում էին այնպիսի հարցերի, որոնք հիմա վճռվում են թվի ու համրանքի միջոցով: Դեռևս հաշվել չիմանալով՝ հնադարյան որսորդը գիտե՞ր՝ բոլո՞ր շները են գնացել նրա հետ որսի, թե՞ մեկը փախել է: Մարդիկ գիտեին, որ ունեն այնքան ձեռք, որքան եղջերուն՝ եղջյուրներ, բռչունն ունի այնքան թև, որքան՝ գայլը աչքեր: Նրանք սովորեցին համրել մինչև երկու:

Խաղաղ օվկիանոսի կղզիներում ապրող շատ ցեղեր մինչև վերջին ժամանակներս օգտվում էին միայն «մեկ» և «երկու» թվանշաններից: 3 թիվն անվանում էին «երկու–մեկ», 4 թիվը՝ «երկու–երկու», 5 թիվը՝ «երկու–երկու–մեկ», իսկ 6 թիվը՝ «երկու–երկու–երկու»: 6–ից մեծ թվերը նրանք չէին կիրառում և ասում էին «շատ»:

Այդպիսի ժամանակաշրջան անցել են, ըստ երևույթին, բոլոր ժողովուրդները: Մեր լեզվում էլ հիմա հաճախ «շատի» փոխարեն ասում ենք «յոթ»: «Յոթ հոգին մեկին չեն սպասում», «Յոթ անգամ չափիր, մեկ անգամ կտրիր», «Յոթ դժբախտություն, մեկ պատասխան», «Մենք աշխատի, յոթն ուտի» և այլն:

Հետո հայտնվեցին նաև ուրիշ թվականներ՝ «երեք», «չորս», «հինգ» և այլն: Համրանքը հեշտացնելու համար սկսեցին առարկաները դասավորել կույտերով՝ հնգյակներով, տասնյակներով, դյուժիններով: Դյուժինը (12 առարկայից կազմված կույտ) հարմար էր այնքանով, որ հեշտ էր բաժանել երկու, երեք, չորս և վեց հավասար մասերի: Մինչև այժմ որոշ իրեր (պատառաքաղներ, դանակներ, բաշկինակներ) դյուժիններով են հաշվում: Բայց ավելի հաճախ օգտվում էին հնգյակներից (5 առարկայից կազմված կույտեր) և տասնյակներից (10 առարկայից կազմված կույտեր), քան՝ դյուժիններից: Չէ՞ որ հնգյակները և տասնյակները հեշտ է մատներով հաշվել՝ հնգյակում այնքան առարկա կա, որքան մատ՝ մի ձեռքի վրա, իսկ տասնյակում՝ այնքան առարկա, որքան մատ՝ երկու ձեռքի վրա:

Եթե հարկավոր էր հաշվել շատ առարկաներ, կույտերը միացնում էին մեծ կույտում՝ տասը տասնյակը կազմում էր հարյուրյակ, տասը հարյուրյակը՝ հազարյակ: Այդ դեպքում հաշվում էր մի քանի մարդ: Առաջինը հաշվում էր միավորները՝ ծալելով ձեռքերի մատները մեկը մյուսի հետևից: Երբ հաշվարարի բոլոր 10 մատները ծալվում էին, դրանք բացում էր, իսկ մյուս հաշվարարը ծալում էր մեկ մատը: Նրա մատները ցույց էին տալիս, թե քանի լրիվ տասնյակ է հաշված: Երբ նա էլ էր ծալում բոլոր մատները, նշանակում էր, որ հաշված է 10 լրիվ տասնյակ, այսինքն՝ մեկ հարյուրյակ: Այդ դեպքում երրորդ հաշվարարը ծալում էր մեկ մատը: Եթե հաշվի վերջում պարզվում էր, որ երրորդը ծալել է 6 մատ, երկրորդը՝ 2 մատ, իսկ առաջինը՝ 8 մատ, նշանակում էր, որ հաշվել են 6 հարյուրյակ, 2 տասնյակ և 8 միավոր, այսինքն՝ 628 առարկա: Հաշվի այսպիսի համակարգը կոչվում է տասնորդական, որովհետև հիմքում ընկած է 10 թիվը:

Թվերի հայկական անունները կապված են համրանքի տասնորդական համակարգի հետ: Օրինակ՝ տասնյոթ, նշանակում է «տասը և յոթ», երեսուն՝ «երեք տասնյակ», իսկ յոթանասուն՝ «յոթ տասնյակ»:

Ներկայումս աշխարհի բոլոր ժողովուրդները հաշվում են տասնյակներով, հարյուրյակներով և հազարյակներով, այսինքն՝ օգտվում են համրանքի տասնորդական համակարգից: Բայց անցյալում որոշ ժողովուրդներ կիրառում էին հաշվի ուրիշ համակարգեր: Տաք երկրներում, ուր մարդիկ քայլում էին բոկոտն, հաշվի համար կիրառում էին ոչ միայն ձեռքերի, այլև ոտքերի մատները: Ստացվում էր քսանյակներով հաշիվ: Այսպես հաշվում էին աֆրիկյան և ամերիկյան մի քանի ժողովուրդներ: Այժմ էլ ֆրանսիացիներն 80 թիվն անվանում են մի բառով, որը հայերեն լեզվով բազմանելիս նշանակում է «4 անգամ քսան»: Նշանակում է՝ նրանց նախնիները հաշվելիս են եղել քսանյակներով:

5 հազար տարի առաջ Արևելքի մի քանի երկրներում հաշվում էին 60–ական առարկա պարունակող կույտերով (այսինքն՝ հնգյակների դյուժինով): Թվարկության այդպիսի համակարգի հետքերը պահպանվել են մինչև այժմ: Այժմ էլ ժամը բաժանում ենք 60 րոպեի, իսկ րոպեն՝ 60 վայրկյանի: Համրանքի այսպիսի համակարգի հետ է կապված նաև փռված անկյան բաժանումը 180 աստիճանի. չէ՞ որ $180 = 3 \cdot 60$:

Սկզբնական շրջանում հաշիվների համար հարկավոր էին ոչ շատ մեծ թվեր, այդ պատճառով կարգերի համար հարկավոր էին քիչ անվանումներ: Բայց հին աշխարհի գիտնականներն սկսեցին մտածել հետևյալ հարցի շուրջ. «Իսկ կարելի՞ էր թվով արտահայտել ջրի կաթիլների քանակը՝ գետում, մորեխների քանակը՝ երամի մեջ, ծովափի ավազների քանակը»: Այն թվերը, որոնք նրանք գիտեին, դրա համար բավական չէին: Երկու հազարամյակ առաջ հույն մաթեմատիկոս Արքիմեդը ստեղծեց թվարկության համակարգ, որի մեջ կային այնպիսի մեծ թվեր, որոնցով կարելի էր հաշվել ոչ միայն ծովափի ավազահատիկները, այլև երկրագնդի բոլոր ավազահատիկները: Վիթխարի թվեր հանդիպում են նաև մոտավորապես նույն ժամանակ գրված հնդկական գրքերում:

Հին Ռուսաստանում 10 հազարը անվանում էին «тьма» (բյուր), 100 հազարը՝ «легион»: Այժմ էլ, երբ ցանկանում են ասել, որ շատ մարդ է հավաքվել, ասում են՝ «народу–тьма» (անթիվ քանակությամբ ժողովուրդ): «Միլիոն» անվանումը կիրառվել է XIV դարից, իսկ միլիարդը՝ XVI դարից: Գոյություն ունեն անվանումներ միլիարդից մեծ կարգերի համար, բայց գործնականում դրանք գրեթե չեն կիրառվում:

Հաշվելիս ոչ միայն հարկավոր էր թվերը կոչել կարողանալ, այլև դրանք գրել:

Մինչև գրության հայտնվելը, թվերը հիշելու համար օգտվում էին հաշվեփայտիկներից՝ փայտի կտորներից, որոնց վրա կատարում էին այնքան քառ (կտրվածք, նշում), որքան միավոր կար թվի մեջ: Իսկ հնդկացիները Ամերիկայում թվերը ներկայացնում էին թելերի վրա արված հանգույցներով:

Երբ առաջացավ գիրը, թվերն սկսեցին գրել հատուկ նշաններով: Շատ ժողովուրդներ օգտվում էին թվական անունների առաջին տառերից (եթե այդպես վարվեինք, ապա տասը կնշանակեինք «տ» տառով, իսկ հարյուրը՝ «հ» տառով): Հին Ռուսաստանում «а» տառը նշանակում էր 1 թիվը, «б» տառը՝ 2 թիվը: Տառեր են եղել նաև 10, 20, ..., 100, ... 1000 թվերը նշանակելու համար: Թվերը բառերից տարբերելու համար տառերի վրա դնում էին գծիկ:

Հաշվարկի՝ առանց զրոյի ոչ դիրքային համակարգի օրինակ է հռոմեական համակարգը: Թվերը գրվում են հետևյալ թվանշանների միջոցով՝

I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000

Եթե փոքր թվանշանը դրված է մեծից աջ, ապա այն ավելանում է մեծին՝ XV = 15, XVI = 16: Եթե փոքր թվանշանը դրված է մեծից ձախ, ապա հանվում է մեծից. IV = 4, IX = 9. XL = 40, XC = 90, CD = 400, CM=900: Այլ դեպքերում հանման կանոնը չի կիրառվում: 1–ից մինչև 21 թվերն այս համակարգում գրառվում են այսպես՝

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X,

XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX, XX, XXI

Քրիստոնեությունը՝ որպես Հայաստանի պետական կրոն ընդունելու տարեթիվը հռոմեական համակարգում կգրվի CCCI (301) տեսքով, իսկ հայկական գրերի ստեղծման տարեթիվը՝ CDV (405):

Հռոմեական համակարգն օգտագործվում է նաև ներկայումս, օրինակ՝ դարերը, գրքի գլուխները, ժամացույցի թվերը նշանակելու համար:

Թվերի գրառման հռոմեական համակարգը անհարմար էր. այդ թվերով դժվար էր թվաբանական գործողություններ կատարելը: Նա դուրս մղվեց թվերի գրառման մեզ հայտնի համակարգի կողմից, որը երևան էր եկել Հնդկաստանում՝ մոտավորապես 1400 տարի առաջ: Այդ համակարգում բոլոր թվերը գրառվում էին 10 թվանշանների միջոցով՝ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9:

Թվանշանի արժեքը կախված էր նրա գրաված տեղից, դիրքից: Այդ պատճառով թվերի գրառման այդ համակարգը անվանում են **դիրքային**: Դիրքային է եղել նաև վաքսունական համակարգը, որի մասին ասվեց վերևում: Միայն Հնդկաստանում երևան եկավ գրառման տասնորդական դիրքային համակարգը: Հնդկացիների նշանավոր հայտնագործությունը կարգերի դատարկ միավորների համար հատուկ նշան՝ «0» թվանշան մտցնելն էր: Չէ՞ որ առանց դրա դժվար կլիներ տարբերել 17–ը 170–ից, 108–ը 1800–ից: Ատինմանաբար թվերի հնդկական եղանակը տարածվեց ամենուրեք: Քանի որ եվրոպացիները թվերի գրառման հնդկական եղանակն իմացան արաբներից, ապա այն թվանշանները, որոնք մենք օգտագործում ենք, հաճախ անվանում են արաբական թվանշաններ:

Հայերն արաբական թվանշաններն օգտագործում են XVII դարից: Իսկ մինչ այդ՝ մեսրոպյան տառերի ստեղծումից հետո, հայերն այդ տառերի միջոցով ստեղծեցին նաև հաշվարկի սեփական համակարգը: Ըստ այդ համակարգի՝ այբուբենի առաջին ինը տառերը (Ա–Թ) արտահայտում են 1–9 թվանշանները, հաջորդ ինը տառերը (Ժ–Ղ) արտահայտում են 1 տասնյակից մինչև 9 տասնյակը, այնուհետև Ճ–ից մինչև Ջ տառերով նշանակվում են հարյուրյակները և, վերջապես, այբուբենի վերջին ինը տառերն արտահայտում են հազարները: Այս բոլորը գրենք աղյուսակի տեսքով:

Ա = 1	Ժ = 10	Ճ = 100	Ռ = 1000
Բ = 2	Ի = 20	Մ = 200	Ս = 2000
Գ = 3	Լ = 30	Յ = 300	Վ = 3000
Դ = 4	Խ = 40	Ն = 400	Տ = 4000
Ե = 5	Ծ = 50	Շ = 500	Ր = 5000
Զ = 6	Կ = 60	Ո = 600	Ց = 6000
Է = 7	Հ = 70	Չ = 700	Ու = 7000
Ը = 8	Ձ = 80	Պ = 800	Փ = 8000
Թ = 9	Ղ = 90	Ջ = 900	Ք = 9000

Այս տառերի միջոցով հեշտությամբ կարելի է գրառել մինչև 9999 ցանկացած բնական թիվ: Օրինակներ՝ ՑԱ = 6001, ՈւՊԷ = 7807, ՉԿԹ = 769, ՔՋՂԹ = 9999: Իսկ 10000–ը հայկական համակարգում պարզապես կոչվել է «բյուր», ունեցել է հատուկ նշան «^»: Եթե այդ նշանը դրվում էր այբուբենի որևէ տառի վրա, ապա այդ տառով արտահայտվող թիվն ուղղակի բազմապատկվում էր 10000–ով: Օրինակ՝

$$\hat{\text{Ա}} = 10000,\ \hat{\text{Ի}} = 200000,\ \hat{\text{Չ}} = 7000000,\ \hat{\text{Փ}} = 80000000:$$

Քրիստոնեությունը ՅԱ = 301 թվականին ընդունվել է որպես Հայաստանի պետական կրոն: ՆԵ = 405 թվականին Մեսրոպ Մաշտոցն ստեղծել է հայկական տառերը:

Որոշ երկրներում տասական համակարգի փոխարեն օգտագործվել են հաշվարկի հնգական, տասներկուական, քսանական, վաթսունական համակարգեր:

Երբ հնագույն գրագրին հարկավոր էր հաշվել, թե որքան հաց է հարկավոր զորքին, նա զինվորի օրվա չափաբաժինը պետք է բազմապատկեր զինվորների թվով և այն օրերի թվով, որ տևելու էր ռազմերթը: Հարկը գյուղացիների վրա բաժանելու համար հարկավոր էր բաժանում կատարել, կատարել թվաբանական գործողություններ: Դրանց կատարման եղանակները բոլորովին նման չէին ժամանակակից եղանակներին, չէ՞ որ թվերն էլ բոլորովին այլ կերպ էին գրում: Օրինակ՝ եգիպտացիները բազմապատկման համար օգտվում էին թվերի կրկնապատկումից: Թիվը 6–ով բազմապատկելու համար կրկնապատկում էին, հետո նորից կրկնապատկում արդյունքը և ստացված պատասխանները՝ գումարում (6a = 4a + 2a): Արևելքի ուրիշ երկրներում հաշվումների համար օգտվում էին մեր բազմապատկման աղյուսակների նման աղյուսակներից: Միայն նրանում տրված էին նաև շատ մեծ թվերի

արտադրյալների պատասխանները: Հին Հունաստանում և Հին Հռոմում հաշվումների համար օգտագործում էին հատուկ հաշվային տախտակներ՝ աբակներ:

Հատկապես դժվար էին համարվում բազմապատկման և բաժանման գործողությունները: Այդ պատճառով դեռ մինչև մի քանի հարյուրամյակ առաջ լավ հաշվել իմացող մարդիկ շրջում էին երկրից երկիր: Վաճառականները նրանց վարձում էին տարբեր հաշվարկներ կատարելու համար:

Դեռ 3 հազար տարի առաջ կազմվել են մաթեմատիկայի առաջին դասագրքերը: Նրանցով գրագիրներին սովորեցնում էին թվերը գրել, գումարել, հանել, բազմապատկել և բաժանել, լուծել խնդիրները: Քանի դեռ գրքերը գրում էին ձեռքով, այդպիսի դասագրքերը քիչ էին: Բայց երբ XV դարում հայտնագործեցին տպագրությունը, մաթեմատիկայի դասագրքերի թիվն սկսեց արագ աճել: Ռուսաստանում մաթեմատիկայի առաջին դասագիրքը տպագրել է Լեոնտի Ֆիլիպովիչ Մագնիցկին 1703 թվականին:

Մինչև մեր ժամանակները հասած մաթեմատիկական հին ձեռագրերում հանդիպում են ոչ միայն ամբողջ թվեր, այլև կոտորակներ: Հին Եգիպտոսում գիտեին միայն մասերը, և կար հատուկ նշան $\frac{2}{3}$ կոտորակի համար: Այդ պատճառով գործողությունները կոտորակներով շատ բարդ էին:

XVI դարի վերջում երևան եկան տասնորդական կոտորակները: Տասնորդական կոտորակներով հաշվումներ կատարելիս ստացվում էին մեծ քանակությամբ թվանշաններ ունեցող թվեր: Նիշերի այդպիսի քանակ գործնականում պետք չէր: Ուստի հարկ էր լինում ստացված պատասխանները կլորացնել, կատարել մոտավոր հաշվումներ: Մոտավոր հաշվումների զարգացման համար շատ բան է արել ռուս մաթեմատիկոս և նավաշինարար, ակադեմիկոս Ալեքսեյ Նիկոլաևիչ Կռիլովը (1863–1945): Այժմ հաշվումները հեշտացնելու համար ստեղծել են մեքենաներ, որոնք հաշվում են զարմանալի արագությամբ: Մեկ վայրկյանում այդ մեքենաները կարող են կատարել տասնյակ և հարյուր հազարավոր թվաբանական գործողություններ (գումարում, հանում, բազմապատկում և բաժանում)՝ բազմանիշ թվերի նկատմամբ:

Էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենաներում կիրառում են թվերի երկուական գրառումը: Երկուական գրառման դեպքում բոլոր թվերը գրվում են միայն երկու թվանշանների՝ 0–ի և 1–ի միջոցով: Այս համակարգում թվանշանը մեկ կարգով դեպի ձախ տեղափոխելիս նրա արժեքը կմեծանա ոչ թե տասը, այլ երկու անգամ: Ուստի այդ համակարգում 10 գրառումը նշանակում է երկու թիվը: Իսկ եթե 1–ը տեղաշարժենք մեկ կարգով ևս դեպի ձախ, ապա նրա արժեքը կմեծանա ևս երկու անգամ: Ուստի թվարկության այդ համակարգում 100 գրառումը նշանակում է չորս թիվը:

Բնական թվերի հատկությունների վերաբերյալ գիտությունը հին հույները անվանում էին **թվաբանություն** (arithmos բառից՝ թիվ): Դեռ շատ վաղուց մարդիկ նկատել են զույգ և կենտ թվերի միջև եղած տարբերությունը: Բնական թվերի զանազան հատկություններով Հին Բաբելոնի գիտնականները հետաքրքրվել են սրանից մի քանի հազար տարի առաջ: Բնական թվերի հատկությունների վերաբերյալ հետաքրքրությունը նրանցից անցավ Հին Հունաստանի գիտնականներին:

Հույները ուսումնասիրել են թվերի բաժանելիության վերաբերյալ հարցը: Նրանք ուսումնասիրել են այն թվերը, որոնք հավասար են իրենց բոլոր բաժանարարների (տվյալ թվից փոքր) գումարին: Այդպիսի թվերը նրանք անվանել են **կատարյալ**: Կատարյալ թվեր են, օրինակ՝ 6 և 28 թվերը: 6 թիվը հավասար է իր՝ 1, 2 և 3 բաժանարարների գումարին: 28 թիվը հավասար է իր՝ 1, 2, 4, 7 և 14 բաժանարարների գումարին: Ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի, պարզ և բաղադրյալ թվերի գաղափարը ծագում է հին հունական մաթեմատիկայից: Դրանց մասին գրել է Եգիպտոսի Ալեքսանդրիա քաղաքում բնակվող մաթեմատիկոս Էվկլիդեսը իր «Սկզբունքներ» գրքում, որը երկու հազարամյակի ընթացքում մաթեմատիկայի հիմնական դասագիրք է հանդիսացել: Էվկլիդեսը գիտեր, որ պարզ թվերն անվերջ շատ են, յուրաքանչյուր բաղադրյալ թիվ կարելի է միակ ձևով վերածել պարզ արտադրիչների արտադրյալի:

Մեզ հասած ամենահին գրավոր աղբյուրներում՝ եգիպտական պապիրուսներում և բաբելոնյան կավե փոքրիկ աղյուսակներում հանդիպում են ոչ միայն բնական թվեր, այլև **կոտորակներ**: Դրանք հարկավոր էին երկարության, մակերեսի, կշռի չափման արդյունքն արտահայտելու համար այն դեպքում, երբ չափման միավորն ամբողջ թիվ անգամ չէր պարունակվում չափվող մեծության մեջ: Այն ժամանակ մտցրին նոր, չափման ավելի փոքր միավոր: Չափման այդ միավորների անվանումները հենց դարձան կոտորակների առաջին անվանումները: Օրինակ՝ հռոմեացիների մոտ ունցիան նախ եղել է կշռի միավորի տասներկուերորդ մասի անվանումը: Իսկ հետո «ունցիա» բառը նշանակեց ցանկացած մեծության տասներկուերորդ մաս և հնարավոր դարձավ խոսել ճանապարհի յոթ ունցիաների մասին (այսինքն՝ ճանապարհի յոթ տասներկուերորդի մասին):

Առաջին կոտորակը, որին ծանոթացավ մարդկությունը, կեսն էր: Բոլոր ժողովուրդների մեջ կեսի անվանումը կապված չէ «երկու» թվի հետ: Մինչդեռ, օրինակ, ռուսաց լեզվում (ինչպես և հայոց լեզվում), բոլոր բաժինների անվանումները կապված են թվերի անվանումների հետ՝ երրորդ մասը «երեք» բառից է, չորրորդ մասը՝ «չորս» բառից և այլն:

Եգիպտացիների մոտ հատուկ նշաններ եղել են $\frac{1}{2}$ և $\frac{2}{3}$ կոտորակների համար, իսկ մնացած բոլոր կոտորակները գրել են մասերի գումարի տեսքով: Օրինակ՝

$$\frac{7}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\qquad \frac{5}{24}=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}$$

Հին Բաբելոնում կոտորակները եղել են վաթսուներորդական, այսինքն՝ գրել են, օրինակ՝ 4, 52, 03 տեսքով: Դա նշանակել է $4+\frac{52}{60}+\frac{3}{60}$ (և՛ Եգիպտոսում, և՛ Բաբելոնում թվանշանները գրելու համար օգտագործել են մեր թվանշաններից բոլորովին տարբեր նշաններ): Եվ այժմ, երբ գրում ենք 3 ժ 21 ր 47 վրկ, ապա, ըստ էության, ժամի մասերը գրում ենք թվարկության վաթսունական համակարգով:

Հին Ռուսաստանում եղել են «կես» և «մեկ երրորդ» կոտորակները, իսկ մնացածները ստացվում էին նրանցից՝ երկու հավասար մասերի բաժանելով: Օրինակ՝ ասում էին ոչ թե «մեկ տասներկուերորդ», այլ՝ «կես–կես–երրորդի»:

Արդեն հին հույների մոտ երևան է գալիս կոտորակները համարիչի և հայտարարի միջոցով գրելը: Միայն հայտարարը գրում էին վերևում, իսկ համարիչը՝ ներքևում: Համարիչը՝ վերևում, իսկ հայտարարը ներքևում գրելը առաջին անգամ գործածել են հնդիկները՝ մոտ 1500 տարի առաջ: Բայց նրանք համարիչի և հայտարարի միջև գիծ չէին դնում: Կոտորակի գիծը ընդհանուր գործածական դարձավ միայն XVI դարում:

Հնում, որպես կանոն, կիրառել են սովորական կոտորակներ: Դա բացատրվում էր չափերի համակարգի բարդությամբ, որում չափման միավորները բաժանվում էին և՛ 12, և՛ 16, և՛ 40 մասերի: Բաբելոնյան վաթսունական կոտորակներն օգտագործում էին միայն գիտնականները: Բայց հետո նկատվել է, որ հաշվումների համար ամենահարմարը տասնորդական կոտորակներն են: Միայն XVII–XVIII դարերում դրանք ստացան ընդհանուր տարածում: Տասնորդական կոտորակները վերջնականապես դարձան առավել գործածական չափերի և կշիռների տասնորդական համակարգ մտցնելուց հետո:

Մեր թվարկության V դարից հետո մաթեմատիկական հետազոտությունները Եվրոպայում գրեթե դադարեցվեցին: Քրիստոնեական կայսրերը, մահապատժի սպառնալիքի տակ, արգելեցին մաթեմատիկայով, աստղագիտությամբ և ուրիշ «հեթանոսական» գիտություններով զբաղվելը: Մաթեմատիկական հետազոտությունների կենտրոնը տեղափոխվեց արաբական երկրներ: Արաբները թարգմանեցին Արքիմեդի, Էվկլիդեսի և հույն մյուս գիտնականների ստեղծագործությունները: Մաթեմատիկայում մեծ ավանդ ներդրեցին Միջին Ասիայի գիտնականները (ուզբեկներ, տաջիկներ), որոնք գրում էին արաբերեն:

Արաբները ոչ միայն պահպանեցին հին հունական գիտությունը, այլև իրենք ստացան կարևոր գիտական արդյունքներ: Նրանք զարգացրին **հավասարումների** մասին գիտությունը: Հավասարումները լուծելու կանոններից մեկը՝ հավասարման անդամները մի մասից մյուսը տեղափոխելը հակառակ նշանով, արաբերեն կոչվել է «ալ–ջեբր», այսինքն՝ վերականգնում: Ուստի և հավասարումները լուծելու մասին գիտությունը կոչվեց **հանրահաշիվ**: Մի քանի հանրահաշվական հասկացություններն այժմ էլ ունեն արաբական անվանումներ, օրինակ՝ «ալգորիթմ»՝ որոշակի կարգով կատարվող գործողությունների ամբողջություն:

Արդյունաբերության, արհեստների, ճարտարապետության, ծովագնացության զարգացումը գիտությունների վերելք առաջացրեց Արևմտյան Եվրոպայում: Եվրոպայի առաջին մաթեմատիկոսները սովորել են արաբական համալսարաններում, բայց արդեն XIII դարում մաթեմատիկայի գրքեր են հրատարակվել նախ Իտալիայում, իսկ հետո Գերմանիայում, Ֆրանսիայում և ուրիշ եվրոպական երկրներում: Հետագա զարգացում ստացավ հանրահաշիվը: Ըստ որում՝ բոլոր գրառումները սկզբում կատարել են բառերով: Դա անհարմար էր և շատ տեղ էր զբաղեցնում: Թվաբանական գործողությունների համար աստիճանաբար երևան են գալիս կրճատ նշանակումները, անհայտ մեծությունների փոխարեն գրում են տառեր, ի հայտ են գալիս փակագծերը, հավասարության և անհավասարության նշանները: Ավելի ուշ երևացին աստիճանների համար ժամանակակից նշանակումները: Տառային նշանակումները և տառերի հետ գործողությունների կանոնները ամբողջությամբ զարգացրեց ֆրանսիացի մաթեմատիկոս և փիլիսոփա Դեկարտը, որն ապրել է XVII դարում:

Հանրահաշվի զարգացումը պահանջեց թվի մասին հասկացության հետագա ընդհանրացում: Հավասարումներ լուծելիս երևան եկան **բացասական** պատասխանները: Նախկինում Եվրոպայի մաթեմատիկոսներն այդ պատասխանները համարում էին անմիտ, իմաստ չունեցող, բեև արդեն XII դարում հնդիկ մաթեմատիկոսները մեկնաբանել էին դրական և բացասական թվերի միջև եղած տարբերությունը՝ որպես «ունեցվածքի» և «պարտքի» միջև եղած տարբերություն: Բացասական թվերի լրիվ պարզաբանումը և նրանց հետ գործողությունների հիմնավորումը տվել է Դեկարտը: Նա դրական և բացասական թվերը սկսեց պատկերել թվային ուղիղների կետերով: Բանաձևերը պատկերելու համար Դեկարտը մտցրեց կոորդինատային հարթությունը: Դեկարտի ժամանակներից սկսած՝ հանրահաշիվն անվանեցին գիտություն՝ հավասարումների և տառային արտահայտություններով գործողությունների մասին: Այժմ թվաբանական գործողությունների հատկությունների ուսումնասիրությունը նույնպես համարում են հանրահաշվի մի մասը:

ՀԱՎԵԼՎԱԾ 2

ԲՆԱԿԱՆ ՑՈՒՑԻՉՈՎ ԱՍՏԻՃԱՆ

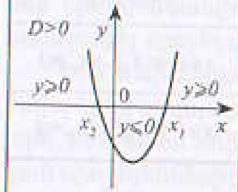
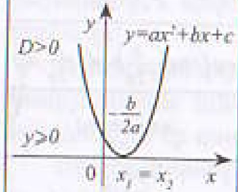
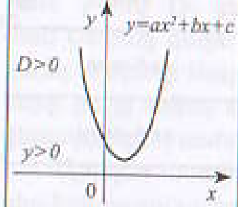
1) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n}$
2) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
3) $a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0,\ m \geqslant n)$
4) $(a^n)^m = a^{mn}$
5) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
6) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

ԿՐՃԱՏ ԲԱԶՄԱՊԱՏԿՄԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐ

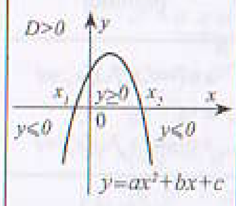
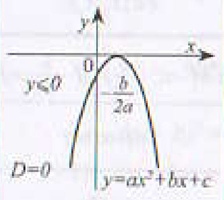
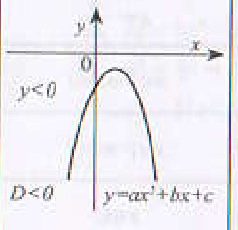
1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
4) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
7) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Քառակուսային անհավասարումների լուծումները

$a > 0 \ (D > 0,\ D = 0,\ D < 0)$:

Երկրաչափական պատկերումը (երբ $a>0$)	$a^2+bx+c>0$ հավասարման արմատները		Անհավասար-ման տեսքը	Անհավասարման լուծումը
	$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$,	$a > 0$	1. $ax^2+bx+c>0$	$x \in (-\infty; x_2] \cup [x_1; \infty)$
	$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$	$D > 0$	2. $ax^2+bx+c \geq 0$	$x \in (-\infty; x_2] \cup [x_1; \infty)$
			3. $ax^2+bx+c<0$	$x \in (x_2; x_1)$
	$(x_2 < x_1)$		4. $ax^2+bx+c \leq 0$	$x \in [x_2; x_1]$
			5. $ax^2+bx+c>0$	$x \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}; \infty\right)$
	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	$a > 0$	6. $ax^2+bx+c \geq 0$	$x \in (-\infty; \infty)$
		$D = 0$	7. $ax^2+bx+c<0$	$x \in \varnothing$
			8. $ax^2+bx+c \leq 0$	$x = -\frac{b}{2a}$
			9. $ax^2+bx+c>0$	$x \in (-\infty; \infty)$
	$x \in \varnothing$	$a > 0$	10. $ax^2+bx+c \geq 0$	$x \in (-\infty; \infty)$
		$D < 0$	11. $ax^2+bx+c<0$	$x \in \varnothing$
			12. $ax^2+bx+c \leq 0$	$x \in \varnothing$

$a < 0$ ($D > 0$, $D = 0$, $D < 0$)

Երկրաչափական պատկերումը (երբ $a<0$)	$a^2+bx+c=0$ հավասարման արմատները		Անհավասարման տեսքը	Անհավասարման լուծումը
	$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ ($x_1 < x_2$)	$a<0$ $D>0$	13. $ax^2+bx+c>0$	$x\in(x_1;x_2)$
			14. $ax^2+bx+c\geq0$	$x\in[x_1;x_2]$
			15. $ax^2+bx+c<0$	$x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;\infty)$
			16. $ax^2+bx+c\leq0$	$x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;\infty)$
	$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	$a<0$ $D=0$	17. $ax^2+bx+c>0$	$x\in\varnothing$
			18. $ax^2+bx+c\geq0$	$x=-\frac{b}{2a}$
			19. $ax^2+bx+c<0$	$x\in\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a};\infty\right)$
			20. $ax^2+bx+c\leq0$	$x\in(-\infty;\infty)$
	$x\in\varnothing$	$a<0$ $D<0$	21. $ax^2+bx+c>0$	$x\in\varnothing$
			22. $ax^2+bx+c\geq0$	$x\in\varnothing$
			23. $ax^2+bx+c<0$	$x\in(-\infty;\infty)$
			24. $ax^2+bx+c\leq0$	$x\in(-\infty;\infty)$

ՀԱՎԵԼՎԱԾ 3

ՊԱՏՄԱԿԱՆ ԱԿՆԱՐԿ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԾԱԳՄԱՆ ԵՎ ԶԱՐԳԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Երկրաչափությունը, ինչպես և մյուս գիտությունները, առաջացել է մարդկանց գործնական պահանջներից ելնելով: Աշխատանքի գործիքներ պատրաստելիս, բնակարաններ կառուցելիս անհրաժեշտություն է առաջացել որոշել առարկաների ձևը և չափերը:

Երբ նախնադարյան մարդիկ կավից ամաններ էին պատրաստում, նախշերով զարդարում էին դրանք: Սկզբում այդ նախշերը շատ պարզ են եղել, իսկ հետո ավելի ու ավելի են բարդացել և վերածվել երկրաչափական պատկերներից կազմված զարդանկարների՝ եռանկյունների, քառակուսիների, վեցանկյունների և շրջանների:

Երկրաչափական պատկերների հետ գործ են ունեցել և՛ կաշի ձևող կաշեգործը, և՛ երկաթյա առարկաներ կռող դարբինը, և՛ գործվածքը ձևող դերձակը:

Գ-յուղացիները հավաքած բերքը չափում էին ամբյուղներով, իսկ զամբյուղներն ունեին տարբեր ձևեր և տարբեր ծավալներ, ուստի անհրաժեշտ էր զամբյուղի ծավալը չափել կարողանալ:

Երկրաչափական պատկերների հետ գործ ունեին նաև հողաչափները: Հին Եգիպտոսում ամբողջ հողագործությունը կենտրոնացած էր շատ նեղ հողաշերտում՝ Նեղոս գետի հովտում: Հողը քիչ էր, և ամեն գյուղացի շատ թանկ էր գնահատում իր հողակտորը: Յուրաքանչյուր գարնան Նեղոսը դուրս էր գալիս ափերից և հողը պարարտացնում արգավանդ տիղմով: Բայց հեղեղումների ժամանակ հողակտորների սահմանները ցույց տվող նշանները անհետանում էին, հարկ էր լինում նորից վերականգնել սահմանները:

Այսպես աստիճանաբար երևան եկան նախնական տեղեկություններ երկրաչափական պատկերների մասին:

Արհեստների զարգացմանը զուգընթաց կատարելագործվում էին նաև գիտելիքները: Տաճարների, պալատների, բուրգերի շինարարներին անհրաժեշտ էր իմանալ, թե ինչպիսին կլինի բուրգի ծավալը, որքան քար կգնա նրա համար, քանի սալաքար կտեղավորվի բուրգի յուրաքանչյուր շերտում: Իսկ շենքերը չփլվելու համար հարկավոր էր պատերը վեր բարձրացնել ուղղաձիգ՝ երկրի մակերևույթի նկատմամբ ուղիղ անկյան տակ: Ուղիղ անկյուններ կառուցելու համար եգիպտացիներն օգտվում էին 12 հավասար մասերի բաժանված պարանից: Նրանք նկատել էին, որ 3, 4 և 5 կողմեր ունեցող ABC եռանկյան մեջ, որի պարագիծը հավասար է 12–ի, AB և BC կողմերի միջև եղած անկյունը ուղիղ է:

Պատկերների վերաբերյալ գիտելիքները գրում էին գրքերում, փոխանցում գրագիրների և շինարարների մի սերնդից մյուսին: Առաջացավ մակերեսների և ծավալների չափման, երկրաչափական տարբեր պատկերների վերաբերյալ գիտություն:

Քանի որ հիմնականում խոսքը վերաբերում էր հողակտորների չափմանը, ապա հին հույները այդ գիտության մասին իմանալով եգիպտացիներից, այն անվանեցին **երկրաչափություն** (հունարեն «գեոս» – երկիր, իսկ «մետրեո» – չափում եմ: Գեոմետրիա – գիտություն երկիրը չափելու մասին):

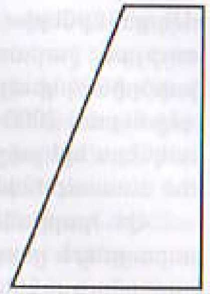
Մեզ հասած նյութական մշակույթի հուշարձանները և բազմաթիվ հնադարյան գրավոր փաստաթղթերը վկայում են, որ շուրջ 4000 տարի առաջ Հին Եգիպտոսի և Բաբելոնի բնակիչները տիրապետում էին երկրաչափական գիտելիքների մեծ պաշարի: Օրինակ՝ եգիպտական բուրգերը (փարավոնների դամբարանները) աչքի էին ընկնում ձևի զարմանալի կանոնավորությամբ: Պարզ է, որ դրանց կառուցումը ղեկավարել կարող էին միայն այնպիսի մարդիկ, որոնք ունեին երկրաչափական գիտելիքներ: Հին եգիպտական պապիրուսներում, որոնք վերաբերում են 2000–1700 թթ. մ.թ.ա., պարունակվում են երկրաչափական մի շարք խնդիրների լուծումներ, բատ որում՝ նրանցից մի քանիսը լուծված են ավերի:

Ահա այդ լուծումներից մեկը:

«Պատրաստել հատած բուրգ (պապիրուսում այն պատկերված է սեղանի տեսքով, նկ. 68), եթե հայտնի է. բարձրությունը՝ 6, ներքևում՝ 4, վերևում՝ 2: Վարվիր, ինչպես պետք է. 4–ը բարձրացրու քառակուսի, որը տալիս է 16, կրկնապատկիր 4–ը, որը տալիս է 8, այնուհետև քառակուսի բարձրացրու 2–ը, որը տալիս է 4: 16–ին ավելացրու 8 և 4, որը կտա 28: Այնուհետև վերցրու 6–ի $\frac{1}{3}$–ը, որը կտա 2, այնուհետև վերցրու 28–ը երկու անգամ, որը կտա 56: Դա 56–ն է: Այն, ինչ ցանկանում էինք գտնել, ճիշտ է»:

Եթե հիմքերի կողմերը և բարձրությունը նշանակենք a, b, H–ով, ապա հին դարերի եգիպտացի մաթեմատիկոսի առաջարկած լուծումը կարելի է բանաձևի միջոցով գրել.

$$V = (a^2 + ab + b^2) \cdot \frac{H}{3}$$



Նկ. 68

Այս բանաձևն արտահայտում է միանգամայն ճիշտ եղանակ՝ քառակուսի հիմքերով հատած բուրգի ծավալը հաշվելու համար:

Երկրաչափական գիտելիքների հետագա կուտակման և համակարգման գործում մեծ ծառայություններ պատկանում են Հին Հունաստանի գիտնականներին:

Երկրաչափական փաստերի առաջին ապացույցները կապված են Թալես Միլեթացու (639–548 թթ. մ.թ.ա.) անվան հետ: Թե դատողությունների ինչպիսի եղանակներ էր կիրառում Թալեսը, կարող ենք միայն գուշակել: Օրինակ՝ խորհելով Թալեսի՝ «տրամագիծը կիսում է շրջանը», «հակադիր անկյունները հավասար են» թեորեմների ձևակերպումների շուրջ, կարելի է ենթադրել, որ այդ հատկությունների ճշտությունը հայտնաբերվել է մի պատկերը մյուսի հետ համատեղելու միջոցով: Թալեսին են վերագրում նաև եռանկյունների համընկնելիության հայտանիշների ապացուցումը, երկու ուղիղների վրա զուգահեռ ուղիղներով հատվող համընկնելի հատվածների մասին թեորեմի ապացուցումը և այլն:

Բազմաթիվ թեորեմների ապացուցման հեղինակ է Պյութագորասը (564–473 թթ. մ.թ.ա.): Սակայն նշանավոր «Պյութագորասի թեորեմը» հայտնի էր դեռ նրանից շատ առաջ: Մինչև հիմա մնում է չպարզված, թե ով է առաջինն ապացուցել այդ թեորեմը, և ինչ ապացուցում է տվել այն ժամանակ Պյութագորասը:

Մաթեմատիկայի որոշ պատմաբաններ Պյութագորասին են վերագրում կանոնավոր բազմանիստերի՝ քառանիստի, խորանարդի, ութանիստի, ինչպես նաև տասներկուանիստի և քսանանիստի հայտնագործումը:

Երկրաչափական փաստերի ճշտության ապացույցները, դատողությունների ընդհանուր մեթոդները գիտության մեջ գրավել են հին դարերի նշանավոր փիլիսոփաների՝ Դեմոկրիտի, Պլատոնի, Արիստոտելի ուշադրությունը:

V և IV դարերում մ.թ.ա. երկրաչափական նյութը ապացուցումներով հիմնավորված մի շարք պնդումների տեսքով հետևողաբար շարադրելու փորձեր են կատարվել:

Առաջին աշխատանքները երկրաչափության համակարգման վերաբերյալ մեզ չեն հասել. դրանք բոլորը մոռացվեցին Էվկլիդեսի նշանավոր

«Սկզբունքների» (մոտ 300 թ. մ.թ.ա.) հանդես գալուց հետո: Այս աշխատության շարադրանքի հետևողականությունն ու խստությունը այն դարձրին երկրաչափական գիտելիքների աղբյուր՝ աշխարհի բազմաթիվ երկրներում 2000-ից ավելի տարիների ընթացքում: Մինչև վերջին ժամանակներս երկրաչափության համարյա բոլոր դպրոցական դասագրքերը մեծ մասամբ համանման էին «Սկզբունքներին»:

Հին դարի մեծագույն մաթեմատիկոս Արքիմեդը (287–212 թթ. մ.թ.ա.) խորացրեց և լրացրեց Էվկլիդեսի տեսական դրույթները: Արքիմեդի հայտնագործություններից մեկը այն հարցերի մանրամասն մշակումն, որոնք կապված են շրջանագծի երկարության և շրջանի մակերեսի չափման, պատկերների ծավալների հաշվման հետ, այդ թվում գլանի և գնդի ծավալների հաշվումը: Արքիմեդը զոհվեց իրեն հայրենիքում՝ իր հայրենի քաղաք Սիրակուզայի հռոմեական զավթիչների հարձակումից պաշտպանելիս: Նա կտակել էր իր գերեզմանաքարի վրա պատկերել գլանին ներգծված գունդ: Այն բանի ապացուցումը, որ այդ գնդի ծավալը կազմում է գլանի ծավալի 2/3-ը, դարձավ Արքիմեդի գիտական նվաճումներից մեկը:

Արքիմեդի ժամանակակից Ալեքսանդր Պերկեցին գրել է մանրամասն տրակտատ կոնական հատույթների՝ էլիպսների, հիպերբոլների և պարաբոլների մասին: Մի փոքր ուշ՝ II դ. մ.թ.ա. Հիպարքոսը կազմել է լարերի առաջին (մեզ չի հասել) աղյուսակը, այն փոխարինում էր այժմ կիրառվող սինուսների աղյուսակին:

Մի շարք աշխատանքներ, որոնք նվիրված էին երկրաչափության մեջ հաշվումների կանոններին, հանդես եկան I և II դդ. մ.թ.ա.: Օրինակ՝ Հերոն Ալեքսանդրիացու «Մետրիկա» գրքում տրված են մակերեսների և ծավալների հաշվման կանոններ. օրինակ՝ եռանկյան մակերեսի հաշվման կանոնը, երբ տրված են նրա երեք կողմերի երկարությունները (հիքշիալյաց, այդ կանոնը հայտնի էր դեռևս Արքիմեդին): Մաթեմատիկոս և աստղագետ Պտղոմեոսի կազմած լարերի աղյուսակը պարունակում էր լարերի երկարությունները 0°-ից մինչև 180°-ի անկյունների համար, յուրաքանչյուր 0,5°-ից հետո:

Աղյուսակը կազմված էր Պտղոմեոսի անունը կրող թեորեմի միջոցով. շրջանին ներգծված քառանկյան (ուղղիղի) անկյունագծերի երկարությունների արտադրյալը հավասար է հանդիպակաց կողմերի երկարությունների արտադրյալների գումարին:

Հնադարի ստրկատիրական պետությունների անկումից հետո միջին դարերում առաջավոր գիտության կենտրոնը տեղափոխվում է Արևելքի երկրներ՝ Միջին Ասիա, Հնդկաստան և արաբական երկրներ:

Հնդկաստանում մաթեմատիկայի ծաղկումը վերաբերում է V–X դարերին: Հնդիկները մեծ ուշադրություն էին դարձնում հաշվողական երկրաչափությանը՝ պատկերների մակերեսների մակերեսների և ծավալների հաշվմանը, եռանկյունաչափական հաշվումներին: Եռանկյունաչափության մեջ նրանք օգտվում էին ոչ թե լարից, այլ կիսալարից՝ սինուսի հետ միասին մուծեցին նոր ֆունկցիա, որն այժմ կոչվում է կոսինուս:

Հնդիկ գիտնականների աշխատություններում մանրամասն հիմնավորումները հաճախ բացակայում էին, երբեմն գծագրը և «տես» բառը կազմում էին թեորեմի ողջ շարադրանքը:

VII դարում արաբների նվաճումները հանգեցրին Հնդկաստանից մինչև Իսպանիա եղած տարածքում հսկայական պետությունների առաջացմանը, քաղաքների աճմանը, տնտեսական և մշակութային կյանքի աշխուժացմանը: Մաթեմատիկայի բնագավառում արաբները օգտվում էին Հնդկաստանի, Չինաստանի գիտնականների նվաճումներից և անտիկ հեղինակների աշխատություններից: IX դարի վերջում արաբերեն թարգմանվեցին Էվկլիդեսի, Արքիմեդի, Ապոլոնի և նրանց բազմաթիվ մեկնաբանների ստեղծագործությունները: Արաբերեն գրվեցին ներկայումս միջնադարյան պետությունների գրադարանում պահպանված IX–XI դարերում ապրած գիտնականների մաթեմատիկական երկեր:

Հատկապես լայն զարգացում ստացավ այդ ժամանակ մաթեմատիկայի այն բաժինները, որոնք կարևոր են աստղագիտության, օպտիկայի, մեխանիկայի գործնական հարցերը լուծելու համար: Այդ կապակցությամբ հանրահաշիվը և եռանկյունաչափությունը, որոնց առանձին խնդիրները լուծում էին դեռևս հնադարում, ձևավորվեցին որպես ինքնուրույն մաթեմատիկական առարկաներ, զգալիորեն կատարելագործվեցին երկրաչափական կառուցումների մեթոդները և խնդիրների լուծման գրաֆիկական մեթոդները: Սակայն չմոռացվեցին նաև տեսական խնդիրները, որոնք հուզում էին անտիկ գիտնականներին: Արևելքի այնպիսի խոշորագույն գիտնականներ, ինչպիսիք էին Միջին Ասիայում և Իրանում ապրած նշանավոր մաթեմատիկոս և պոետ Օմար Խայամը (XI դ.) և Նասիր-ադ-Դին-ատ-Թուսին (XII դ., Իրան) ստեղծեցին զուգահեռ ուղիղների ինքնուրույն տեսությունը և համեմատությունների երկրաչափական տեսությունը:

XII դարում խաչակրաց արշավանքների կապակցությամբ Եվրոպայում հետաքրքրություն առաջացավ արաբների մաթեմատիկական կուլտուրայի նկատմամբ: Արաբերենից լատիներեն (այն ժամանակ Եվրոպայի բոլոր երկրների գիտնականների պաշտոնական լեզուն էր) թարգմանվեց Էվկլիդեսի «Սկզբունքները»: Վաղ վերածնության դարաշրջանում (XIV–XV դդ.) մաթեմատիկական գիտելիքները կիրառություն գտան գիտության և պրակտիկայի տարբեր բնագավառներում: Աշխարհագրական մեծ հայտնագործությունների (XV դ.) նախօրյակին հատուկ հետաքրքրություն առաջացավ աստղագիտության և դրա հետևանքով եռանկյունաչափության նկատմամբ:

Արաբ գիտնականների ազդեցությունը նկատելի է Եվրոպայում առաջին անգամ հրատարակված «Հինգ գիրք ամեն տեսակի եռանկյունների մասին» եռանկյունաչափական ձեռնարկում (1461 թ.): Այդ ձեռնարկի հեղինակը Յոհան Մյուլլերն էր, որը գիտության մեջ հայտնի է լատինականացված Ռեգիոմոնտան անունով: Արաբ գիտնականներից հետո Ռեգիոմոնտանն օգտագործեց այն եռանկյունաչափական ֆունկցիաները, որոնք մենք անվանում ենք տանգենս և կոտանգենս, կիրառեց հանրահաշիվը երկրաչափական խնդիրներ լուծելիս:

Տեխնիկայի բուռն զարգացումը, որը Արևմտյան Եվրոպայի երկրներում սկսվել էր XVI–XVII դարերում, հանգեցրեց ոչ պակաս նշանավոր արդյունքների մաթեմատիկայի բնագավառում:

XVII դարի առաջին կեսի ֆրանսիացի փիլիսոփա և մաթեմատիկոս Ռենե Դեկարտը իր «Երկրաչափություն» գրքում առաջինը մաթեմատիկայում մուծեց փոփոխական մեծություններ: Դեկարտը հարթության վրա գծերը դիտում էր որպես այնպիսի ֆունկցիաների գրաֆիկներ, որոնք արտահայտում էին մի փոփոխական մեծության կախումը մյուսից: Դրանով նա հիմք դրեց հարթության վերլուծական երկրաչափությանը:

Շուտով փոփոխական մեծությունները վերջնականապես արմատավորվեցին մաթեմատիկայում Իսահակ Նյուտոնի (1643–1727, Անգլիա) և Գոտֆրիդ Վիլհելմ Լայբնիցի (1646–1716, Գերմանիա) աշխատանքների շնորհիվ, որոնք ավարտեցին դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի հիմունքների ստեղծումը: Դեկարտի, Նյուտոնի և Լայբնիցի մաթեմատիկական հայտնագործությունները խսկական հեղափոխություն էին մաթեմատիկայի մեջ: Մաթեմատիկայի նոր բաժինների շնորհիվ հնարավոր եղավ հեշտությամբ գտնել բազմաթիվ երկրաչափական խնդիրների լուծումը, կամայական կորին շոշափող տանելը, տարբեր պատկերների մակերեսների և ծավալների հաշվումը:

XVII դարում ֆրանսիացի գիտնականներ Դեզարգի և Պասկալի աշխատություններով սկիզբ դրվեց երկրաչափության մեջ նոր ուղղության, որը հետագայում ստացավ «պրոյեկտիվ երկրաչափություն» անվանումը: Սենուկես հարյուրամյակ հետո նրանց հայրենակից Գասպար Մոնժը մշակեց պատկերների պատկերման մեթոդը երկու հարթությունների վրա ուղղահայաց պրոյեկտման միջոցով: Մոնժի աշխատանքները հիմք ծառայեցին տեխնիկական գծագրության և գծագրական երկրաչափության համար:

XVIII դարից Ռուսաստանում սկսեցին տպագրել դասագրքեր և գիտական աշխատություններ երկրաչափության վերաբերյալ: Երկրաչափությանը նվիրված բաժիններ կային ռուսերեն առաջին՝ Լ. Ֆ. Մագնիցկու «Թվաբանություն» դասագրքում, որը լույս է տեսել 1703 թ.:

Ռուսաստանում երկար տարիներ ապրել ու աշխատել է ականավոր գիտնական Լեոնարդ Էյլերը (1707–1783): Նա առաջնակարգ կարևոր հայտնագործությունների հեղինակ է մաթեմատիկական անալիզի, թվերի տեսության, երկրաչափական և մեխանիկայի տարբեր բաժիններում: Նշենք Էյլերի առավել հայտնի երկրաչափական արդյունքներից մեկը, որը մաթեմատիկայի պատմության մեջ մտել է նրա անունով:

Ամեն մի ուռուցիկ բազմանիստի մեջ գագաթների Գ թվի և նիստերի Ն թվի գումարը երկու միավորով մեծ է նրա կողերի Կ թվից:

$$Գ + Ն = Կ + 2 \text{ (Էյլերի թեորեմը)}$$

Այս նշանավոր թեորեմի միջոցով կարելի է ստանալ բազմանիստերի մի ամբողջ շարք հատկություններ. օրինակ՝ ապացուցել, որ գոյություն ունեն հինգից ոչ ավելի տարբեր տեսքի կանոնավոր ուռուցիկ բազմանիստեր:

Տարրական բնույթի առանձին յուրօրինակ երկրաչափական փաստեր, որոնք ձեռք են բերել համընդհանուր համբավ և թափանցել են դպրոցական ուսումնական ձեռնարկներ, նույնպես կապված են Էյլերի անվան հետ:

Էյլերի և Մոնժի հետազոտությունների շնորհիվ XVIII դարում ստեղծվեց երկրաչափական պատկերների հատկությունների ուսումնասիրման մեթոդը, որը հիմնված է ածանցյալի կիրառության վրա՝ դիֆերենցիալ երկրաչափությունը:

XIX դարում երկրաչափության, մեխանիկայի և ֆիզիկայի խնդիրների կապակցությամբ ծագեց վեկտորական հաշիվը: Այդ հաշվի ժամանակակից շարադրանքին մոտ շարադրանքը պատկանում է Ջ. Վ. Գիբսին (1839–1903, ԱՄՆ):

Վեկտորների տեսության մշակման և կիրառությունների հարցում քիչ ներդրում չի կատարել ռուս մաթեմատիկոս Ա. Պ. Կոտելնիկովը:

XIX դարի կեսերին ռուս գիտնականները ոչ միայն բարձրացան այն մակարդակին, որը նվաճել էին Արևմտյան Եվրոպայի առաջավոր մաթեմատիկոսները, այլև կատարեցին մի շարք առաջնակարգ նշանակություն ունեցող հայտնագործություններ: Հատուկ տեղ է պատկանում ռուս խոշորագույն գիտնական Ն. Ի. Լոբաչևսկուն (1792–1856), որը ստեղծեց ոչ էվկլիդեսյան երկրաչափությունը:

Որպեսզի ավելի լավ պարզաբանենք Ն. Ի. Լոբաչևսկու գիտական սխրանքի նշանակությունը, դիտարկենք Էվկլիդեսի «Սկզբունքների» որոշ առանձնահատկությունները:

Էվկլիդեսը սկսում է կետի, գծի, ուղղի, մակերևույթի, հարթության, մարմնի, անկյան և այլ երկրաչափական հասկացությունների սահմանումներից: Առաջին սահմանումն ասում է. կետն այն է, ինչը մասեր չունի: Ուղղի սահմանումն այսպիսին է. ուղղին իր բոլոր կետերի նկատմամբ միատեսակ դասավորված գիծ է: Բերված սահմանումները կարելի է դիտել միայն որպես կետի և ուղղի հասկացությունների դիտողական պարզաբանումներ, ըստ որում՝ այդ պարզաբանումները այնքան էլ հաջող չեն: Օրինակ՝ ուղղի «սահմանմանը», ըստ երևույթին, բավարարում է և՛ շրջանագիծը, և՛ գլանային մակերևույթը: Հասկանալի է, հենվել նման սահմանումների վրա մաթեմատիկական տեսություն կառուցելիս չի կարելի, Էվկլիդեսը չի էլ փորձել դա անել:

Այնուհետև Էվկլիդեսը ձևակերպում է տասը արսիոմ, որոնցից առաջին հինգն անվանում է պոստուլատներ: Օրինակ՝ այդ պոստուլատներից առաջինը պնդում է. «Յուրաքանչյուր կետից մինչև յուրաքանչյուր մի այլ կետ կարելի է տանել մեկ ուղիղ գիծ», իսկ առաջին աքսիոմը այսպիսին է. «Միևնույնին հավասարները հավասար են միմյանց»: Պոստուլատների և աքսիոմների հիման վրա ապացուցվում են «Սկզբունքների» մնացած առաջադրությունները (թեորեմները):

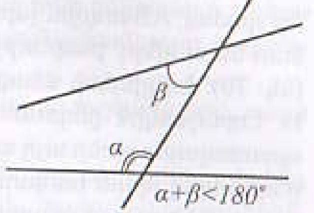
Էվկլիդեսը չի նշում, թե որն է պոստուլատների և աքսիոմների սկզբունքային տարբերությունը: Այժմ ընդունված է միայն «աքսիոմ» տերմինը:

Հնագույն երկրաչափները կարծում էին, որ պոստուլատները և աքսիոմները ապացուցում չեն պահանջում իրենց ակնհայտության պատճառով: Նման կարծիք գիտության մեջ իշխում էր ընդհուպ մինչև XX դարը, երբ այն փոխարինվեց այլ՝ աքսիոմների վերաբերյալ մեր հայացքի տեսակետով:

Բոլոր ժամանակներում մաթեմատիկոսների հատուկ ուշադրությանն է գրավել Էվկլիդեսի հինգերորդ պոստուլատը. **եթե երկու ուղիղներ երրորդի հետ նրա միևնույն կողմում առաջացնում են ներքին անկյուններ,**

որոնց գումարը փոքր է փռված անկյունից, ապա այդպիսի ուղիղները հատվում են այդ նույն կողմում՝ ուղիղները բավականաչափ շարունակելիս (նկ. 69):

Եթե մնացած պոստուլատներն ու աքսիոմները թվում էին լրիվ ակնհայտ, ապա հինգերորդ պոստուլատի ակնհայտությունը կասկածներ առաջացրեց: Այն մյուս պոստուլատներից տարբերվում է նաև ձևակերպման բարդությամբ:



Նկ. 69

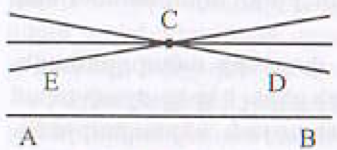
Ուստի բազմաթիվ փորձեր են արվել ապացուցելու այդ պոստուլատը՝ հենվելով «Սկզբունքների» առաջին չորս պոստուլատների և հինգ աքսիոմների վրա: Երկու հազարամյակների ընթացքում բազմաթիվ խոշորագույն մաթեմատիկոսներ փորձել են դա անել, բայց անհաջող: Հաջողվել է միայն հինգերորդ պոստուլատը փոխարինել համարժեք առաջադրություններով, որոնք հաճախ ձևակերպվել են ավելի պարզ և ունեցել մեծ դիտողականություն, բայց, այնուամենայնիվ, մնացել են չապացուցված:

Հինգերորդ պոստուլատի ապացուցման փորձերի անարդյունավետությունը մի քանի նշանավոր գիտնականների բերել է երկրաչափական այնպիսի համակարգի գոյության հնարավորության ենթադրությանը, որում Էվկլիդեսի հինգերորդ պոստուլատի փոխարեն վերցվում է նրան հակասող ասույթ: Ընդ որում՝ սկզբում հարցը դրվել է զուտ տրամաբանորեն, նոր համակարգի դիտողական մեկնաբանումը և գործնական կիրառությունները մնված էին երկրորդական պլան:

Առաջին անգամ լրիվությամբ ու հիմնավորվածությամբ նման երկրաչափություն ստեղծեց Նիկոլայ Իվանովիչ Լոբաչևսկին: 1826 թ. նա կատարում է բանավոր հաղորդում իր հայտնագործության մասին, իսկ հետագայում հրապարակում է մի շարք աշխատություններ ոչ էվկլիդեսյան երկրաչափության վերաբերյալ:

Մոտավորապես նույն ժամանակամիջոցում, անկախ Ն. Ի. Լոբաչևսկուց, ոչ էվկլիդեսյան երկրաչափության հայտնագործմանը հանգեցին հունգարացի նշանավոր մաթեմատիկոս Յանոշ Բոյային և հռչակավոր Կարլ Ֆրիդրիխ Գաուսը: Բոյային իր արդյունքները հրապարակեց 1842 թ., Գաուսը երկար ժամանակ չէր որոշում հրապարակորեն հանդես գալ ոչ էվկլիդեսյան երկրաչափության վերաբերյալ իր աշխատանքների շարադրանքով, իսկ Լոբաչևսկու և Բոյայու աշխատանքների լույս տեսնելուց հետո, ըստ երևույթին, համարեց, որ նման հրապարակումը պետք չէ:

Ն. Ի. Լոբաչևսկին հինգերորդ պոստուլատը փոխարինում է հետևյալ աքսիոմով. AB ուղղին չպատկանող C կետով ABC հարթության մեջ անցնում են անվերջ բազմությամբ ուղիղներ, որոնք չեն հատվում AB–ի հետ (նկ. 70): Էվկլիդեսի մնացած բոլոր պոստուլատներն ու աքսիոմները Ն. Ի. Լոբաչևսկին ընդունում է իբրև ճշմարտություններ: Եթե հինգերորդ պոստուլատը բխեր այդ առաջադրություններից, ապա Ն. Ի. Լոբաչևսկին, ընդունելով նրան հակառոդ առաջադրություն, պետք է ստանար հակասություն հետագա դատողություններում: Բայց ոչ մի հակասություն մնացած իմն աքսիոմների հետ չստացվեց Լոբաչևսկու աքսիոմի հիման վրա նրա ապացուցած բազմաթիվ թեորեմներում ու բանաձևերում: Ավելին՝ Ն. Ի. Լոբաչևսկու ապացուցած առաջադրությունները կազմեցին մի կուռ համակարգ՝ չզիջելով Էվկլիդեսի «Սկզբունքներին» ո՛չ երկրաչափական պատկերների հատկությունների ընդգրկման լրիվությամբ, ո՛չ էլ այդ հատկությունների շարադրանքի տրամաբանականությամբ:


Նկ. 70

Լոբաչևսկու երկրաչափական բազմաթիվ թեորեմներ էապես տարբեր են Էվկլիդեսի երկրաչափության համցույն փաստերից: Բերենք Լոբաչևսկու երկրաչափության մի քանի թեորեմների ձևակերպումներ:

1. Ցանկացած եռանկյան անկյունների գումարը փոքր է 2d–ից և նվազում է եռանկյան մակերեսի աճման դեպքում:
2. Եթե քառանկյան երեք անկյուններն ուղիղ են, ապա չորրորդ անկյունը սուր է:
3. Եթե մի եռանկյան երեք անկյունները համապատասխանաբար հավասար են մեկ այլ եռանկյան երեք անկյուններին, ապա այդպիսի եռանկյունները հավասար են:
4. Գոյություն չունեն նման պատկերներ, որոնք հավասար չեն:
5. Եռանկյան միջին գիծը փոքր է այն կողմի կեսից, որի հետ նա չունի ընդհանուր կետեր:
6. Միևնույն ուղղին չպատկանող ոչ բոլոր երեք կետերով կարելի է տանել շրջանագիծ:
7. Տրված ուղղից հավասարահեռ և միևնույն կիսահարթության, որի համար այդ ուղիղը եզր է, մեջ գտնվող կետերը չեն պատկանում միևնույն ուղղին:
8. Շրջանագծին ներգծած կանոնավոր վեցանկյան կողմը մեծ է շրջանագծի շառավղից:
9. 30˚–ի անկյան դիմացի էջը մեծ է ներքնաձիգի կեսից:
10. Եթե β հարթությունը α հարթության հետ ունի ընդհանուր ուղղահայաց, ապա β հարթության բոլոր կետերի պրոյեկցիաները α հարթության վրա առաջացնում են բաց շրջան:
11. Եթե ուղիղը հարթության հետ ունի ընդհանուր ուղղահայաց, ապա այդ ուղղահայացը միակն է:

Ն. Ի. Լոբաչևսկու աքսիոմը, նրա վրա հիմնված թեորեմները իրենց անսովորությամբ ապշեցրին մեծ գիտնականի ժամանակակիցներին, որոնք չկարողացան գնահատել Ն. Ի. Լոբաչևսկու կողմից կատարված հայտնագործության խորությունն ու նշանակությունը: Սակայն շուտով, «Երկրաչափության Կոպերնիկոսի» մահից հետո նրա գաղափարները ստացան համընդհանուր ճանաչում: Դրան հատկապես նպաստեց իտալացի մաթեմատիկոս Բելտրամի կողմից առաջարկված՝ Լոբաչևսկու հարթաչափության բոլոր աքսիոմները՝ մի քանի պտտման մակերևույթների վրա իրագործման ապացուցումը, մակերևույթներ, որոնք գոյություն ունեն «Էվկլիդեսյան» տարածությունում: Ներկայումս Լոբաչևսկու երկրաչափությունը մաթեմատիկական գիտության մեջ մտնում է Էվկլիդեսի երկրաչափության հետ հավասար իրավունքներով:

Ն. Ի. Լոբաչևսկու հայտնագործության նշանակությունը կայանում է ոչ միայն նրանում, որ վերջ տվեց հինգերորդ պոստուլատի ապացուցման փորձերին:

Ոչ էվկլիդեսյան երկրաչափության ստեղծումը ցույց տվեց, որ Էվկլիդեսի երկրաչափությունը տարածության միակ հնարավոր պատկերացումը չէ, պատկերացում, որը փիլիսոփա–իդեալիստների կարծիքով մարդու մտո բնածին է, նախափորձնական:

Տարածության երկրորդ տրամաբանորեն հնարավոր գծապատկերի հանդես գալը գիտնականների առջև հարց դրեց՝ այդ գծապատկերներից ո՞րն է ճշտորեն արտահայտում իրական, ֆիզիկական տարածության հատկությունները նրա փոքր տեղամասերում (օրինակ՝ երկրագնդի մակերևույթի սահմաններում) և տիեզերքի վիթխարի խորություններում:

Գաուսն ու Լոբաչևսկին առաջարկում էին այդ հարցը լուծել երկրի մակերևույթի վրա իրարից բավականաչափ հեռացված կետերը կամ երկնային լուսատուները գագաթներ ունեցող եռանկյան անկյունների գումարը անմիջապես չափելու ճանապարհով: Սակայն նման չափումները հիմք չէին տալիս մի որևէ որոշակի եզրակացության համար: Միայն հաստատվեց, որ եթե գոյություն ունի եռանկյուն, որի անկյունների գումարը տարբեր է 180°-ից, ապա նույնիսկ բավականաչափ մեծ մակերեսներով եռանկյունների համար այդ «դեֆեկտը» չափազանց փոքր է, որի հետևանքով այն չափիչ սարքերի միջոցով հնարավոր չէ որսալ:

Ն. Ի. Լոբաչևսկու հետազոտությունները աշխարհի գիտնականների ուշադրությունը հրավիրեցին երկրաչափության հիմունքների հարցերի վրա, այսինքն՝ դրեցին հիմնական հասկացությունների ու աքսիոմների այնպիսի համակարգի ստեղծման խնդիր, որը լիներ տրամաբանորեն անբասիր: Դեռևս Ն. Ի. Լոբաչևսկին էր մատնանշել, որ մաթեմատիկական գիտությունը չպետք է սկսել այնպիսի «մութ» հասկացություններից, ինչպիսիք Էվկլիդեսի մոտ կետի, ուղղի և այլնի սահմանումներն էին: XIX դարի կեսերին նշվեցին նաև Էվկլիդեսի աքսիոմատիկայի թերությունները: Օրինակ՝ նկատվեց նրա աքսիոմների համակարգի ոչ լրիվ լինելը: Գծային արտապատկերումների տեսության հիման վրա երկրաչափության կառուցման մեջ մեծ ծառայությունը պատկանում է Ֆ. Կլայնին, որը «Էռլանգենյան ծրագրով» շարադրեց իր սքանչելի գաղափարները (1872):

XIX դարի ամենավերջում գերմանացի գիտնական Դ. Հիլբերտն առաջարկեց հիմնական հասկացությունների և աքսիոմների այնպիսի համակարգ, որը զերծ էր տրամաբանական թերություններից: Հիմնական (չսահմանվող) հասկացությունների դասին Հիլբերտը վերագրեց **կետի, ուղղի** և **հարթության** հասկացությունները: Հիմնական հասկացությունների միջև հաստատված են **պատկանելություն, միջև և համընկնելի** հիմնական առնչությունները: Հիլբերտի մոտ հիմնական առնչությունները ևս տրվում են առանց սահմանումների: Այնուհետև հետևում են 20 աքսիոմներ, որոնք բաժանված են 5 խմբերի: Այդ աքսիոմներից մի քանիսը մեզ լավ հայտնի են (օրինակ՝ պատկանելության աքսիոմները, զուգահեռ ուղիղների աքսիոմը):

Հիլբերտի աքսիոմների համակարգը օժտված է **լրիվության, անհակասականության** և **անկախության** հատկություններով: Դա նշանակում է, նախ, որ այդ համակարգի միջոցով կարելի է ապացուցել էվկլիդեսյան երկրաչափության ցանկացած ասույթի ճշմարիտ կամ սխալ լինելը, երկրորդ, որ ոչ մի երկու առաջադրություն, արտածված տրված աքսիոմներից, չի կարող հանդիսանալ միևնույն մաթեմատիկական փաստի հաստատումը և ժխտումը, վերջապես, այդ համակարգի շատ աքսիոմներ անկախ են, այսինքն՝ չեն կարող արտածվել մնացած աքսիոմներից:

Որպես էվկլիդեսյան երկրաչափության դասընթացի կառուցման հիմք կարելի է ընդունել հիմնական հասկացությունների և աքսիոմների նաև այլ համակարգ: Օրինակ՝ 1918 թ. գերմանացի մաթեմատիկոս Գ. Վայլը առաջարկեց որպես չսահմանվող հասկացություններ դիտել վեկտորը և կետը, իսկ աքսիոմներ համարել վեկտորների և նրանց հետ կատարվող գործողությունների որոշ հատկություններ:

Վայլի աքսիոմների համակարգը պարունակում է ընդամենը 17 աքսիոմ, որոնք տրոհված են հինգ խմբերի:

Եթե ընտրենք Վայլի աքսիոմատիկան, ապա ուղղի և հարթության հասկացությունները կմուծվեն սահմանումների միջոցով, իսկ Հիլբերտի աքսիոմները կապացուցվեն որպես թեորեմներ:

Երկրաչափության որոշ դասագրքեր հիմված են ակադեմիկոս Ա. Ն. Կոլմոգորովի առաջարկած չսահմանվող հասկացությունների և աքսիոմների համակարգի վրա:

Ա. Ն. Կոլմոգորովի առաջարկած 14 աքսիոմները կարելի է ապացուցել որպես թեորեմներ Վայլի աքսիոմատիկայի հիման վրա: Մյուս կողմից՝ Վայլի բոլոր աքսիոմներն իրենցից ներկայացնում են թեորեմներ այն երկրաչափության մեջ, որը կառուցված է Ա. Ն. Կոլմոգորովի աքսիոմատիկայով: Նշված աքսիոմների համակարգերը համարժեք են:

XX դարում աշխարհի բազմաթիվ երկրների գիտնականներ շարունակել են երկրաչափության տարբեր բաժինների մշակումը և հայտնագործել են նոր ուղղություններ երկրաչափական հետազոտություններում: Հիմնարար նշանակություն ունեն խորհրդային մաթեմատիկոսներ Վ. Ֆ. Կագանի, Ս. Պ. Ֆինիկովի, Պ. Ս. Ալեքսանդրովի, Ա. Ն. Կոլմոգորովի, Լ. Ս. Պոնտրյագինի, Ա. Դ. Ալեքսանդրովի և նրանց աշակերտների աշխատանքները:

ՀԱՎԵԼՎԱԾ 4

ԴՊՐՈՑԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԵՎ ԼՐԱՑՈՒՑԻՉ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԸ

1. Հարթաչափություն

Եռանկյուններ

Բանաձևի անվանումը	Բանաձևը	Նշանակումները
Ներքին անկյունների գումարը	$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$	A–ն, B–ն, C–ն անկյունների մեծություններն են:
Կոսինուսների թեորեմը	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$	a–ն, b–ն, c–ն կողմերի երկարություններն են, A–ն a կողմի դիմացի անկյան մեծությունն է:
Սինուսների թեորեմը	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	a–ն, b–ն, c–ն կողմերի երկարություններն են, A–ն, B–ն, C–ն՝ նրանց դիմացի անկյունների մեծություններն են:
Եռանկյան մակերեսը	$S = \frac{1}{2} ah_a$ $S = \frac{1}{2} bc \sin A$	a–ն հիմքի երկարությունն է, h_a–ն՝ բարձրության երկարությունն է, b–ն, c–ն՝ կողմերի երկարությունները, A–ն՝ նրանց կազմած անկյան մեծությունը, p–ն կիսապարագիծն է, a–ն, b–ն, c–ն՝ կողմերի երկարությունները, p–ն՝ կիսապարագիծը, r–ը՝ ներգծյալ շրջանի շառավիղը:
Հերոնի բանաձևը	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $S=pr$	
Միջնագիծ	$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$	a–ն, b–ն, c–ն՝ կողմերի երկարությունները:
Բարձրություն	$h_a = \frac{2S}{a}$	a–ն կողմի երկարությունն է, S–ը՝ եռանկյան մակերեսը:

Կիսորդի հատկությունը	$\frac{b}{c} = \frac{m}{n}$	b–ն, c–ն՝ կողմերի երկարություններն են, m–ը, n–ը այն հատվածների երկարություններն են, որոնց A անկյան կիսորդը բաժանում է a կողմը:
Արտագծյալ շրջանագծի շառավիղը	$R = \frac{abc}{4S}$, $R = \frac{a}{2\sin A}$	a–ն, b–ն, c–ն՝ կողմերի երկարություններն են, S–ը՝ մակերեսը, A–ն՝ անկյան մեծությունը:

Ուղղանկյուն եռանկյուն

Պյութագորասի թեորեմը	$c^2 = a^2 + b^2$	a–ն, b–ն էջերի երկարություններն են, c–ն՝ ներքնաձիգի երկարությունը:
Կողմերի և անկյունների միջև եղած կախվածությունները	$a = c\sin A$, $a = c\cos B$, $c = \frac{a}{\sin A}$, $a = b\,\mathrm{tg}\,A$	a–ն, b–ն էջերի երկարություններն են, c–ն՝ ներքնաձիգի երկարությունը, A–ն և B–ն՝ սուր անկյունների մեծությունները:
Մակերեսը	$S = \frac{1}{2}ab$	a–ն, b–ն էջերի երկարություններն են:
Արտագծյալ շրջանագծի շառավիղը	$R = \frac{c}{2}$	c–ն ներքնաձիգի երկարությունն է
Ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը	$r = \frac{a+b-c}{2}$	a–ն, b–ն էջերի երկարություններն են, c–ն՝ ներքնաձիգի երկարությունը:

Քառանկյուններ

Անկյունների գումարը	$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D = 360°$	A–ն, B–ն, C–ն, D–ն ներքին անկյունների մեծություններն են:
Ներգծյալ քառանկյան անկյունների հատկությունը	$\angle A + \angle C = 180°$	A–ն և C–ն հանդիպակաց անկյունների մեծություններն են:
Պտղոմեոսի թեորեմը (ներգծյալ քառանկյան համար)	$ac + bd = lf$	a–ն, b–ն, c–ն, d–ն կողմերի երկարություններն են, l–ը և f–ը՝ անկյունագծերի երկարությունները:

Արտագծյալ քառանկյան կողմերի հատկությունը	$a + c = b + d$	a–ն, b–ն, c–ն, d–ն կողմերի երկարություններն են:
Արտագծյալ քառանկյան մակերեսը	$S = pr$	p–ն կիսապարագիծն է, r–ը՝ ներգծյալ շրջանի շառավիղը:
Զուգահեռագծի անկյունագծերի հատկությունը	$c^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2$	a–ն, b–ն կից կողմերի երկարություններն են, c–ն, f–ը՝ անկյունագծերի երկարությունները:
Զուգահեռագծի մակերեսը	$S = ah_a$ $S = ab \sin A$	a–ն հիմքի երկարությունն է, h_a–ը՝ բարձրության երկարությունն է, b–ն, a–ն կից կողմերի երկարություններն են, A–ն՝ նրանց կազմած անկյան մեծությունը:
Սեղանի միջին գծի հատկությունը	$MN = \frac{a+c}{2}$	a–ն, c–ն հիմքերի երկարություններն են:
Սեղանի մակերեսը	$S = \frac{a+b}{2}h$ $S = mh$	a–ն, b–ն հիմքերի երկարություններն են, h–ը՝ բարձրության երկարությունը, m–ը միջին գծի երկարությունն է:
Ուղղանկյան մակերեսը	$S = ab$	a–ն, b–ն կողմերի երկարություններն են:
Շեղանկյան մակերեսը	$S = \frac{lf}{2}$	l–ը, f–ը անկյունագծերի երկարություններն են:

Կանոնավոր բազմանկյուններ

Ներքին անկյան մեծությունը	$\angle A_n = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$	n–ը կողմերի թիվն է:
Կողմի երկարությունը	$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$, $a_3 = R\sqrt{3}$, $a_4 = R\sqrt{2}$ $a_6 = R$	R–ը արտագծյալ շրջանագծի շառավիղն է, n–ը՝ կողմերի թիվը:
Մակերեսը	$S = \frac{n}{2}ar$	a–ն կողմի երկարությունն է, n–ը՝ կողմերի թիվը, r–ը՝ ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը (հարթագիծը):

Շրջանագիծ և շրջան

Շրջանագծի երկարությունը	$C = 2\pi R$, $C = \pi D$	R–ը շառավղի երկարությունն է, D–ն՝ տրամագծի երկարությունը:
Աղեղի երկարությունը	$l = \frac{\pi R\alpha}{180}$ $l = R\varphi$	R–ը շառավղի երկարությունն է, a–ն՝ աղեղի մեծությունը (աստիճաններով), φ–ն աղեղի մեծությունն է ռադիաններով:
Շրջանի մակերեսը	$C = \pi R^2$, $S = \frac{\pi D^2}{4}$	R–ը շառավիղն է, D–ն՝ տրամագիծը:
Սեկտորի մակերեսը	$S = \frac{\pi D^2\alpha}{360}$	R–ը շառավղի երկարությունն է, a–ն՝ կենտրոնական անկյան մեծությունն է (աստիճաններով):

II. ՏԱՐԱԾԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ

Բազմանիստեր

Պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը	$S = pl$	p–ը ուղղահայաց հատույթի պարագիծն է, l–ը՝ կողմնային կողի երկարությունը:
Պրիզմայի ծավալը	$V = QH$, $V = Bl$	Q–ն հիմքի մակերեսն է, H–ը՝ բարձրության երկարությունը, B–ն ուղղահայաց հատույթի մակերեսն է, l–ը՝ կողմնային կողի երկարությունը:
Ուղղանկյուն զուգահեռանիստի ծավալը	$V = abc$	a–ն, b–ն, c–ն զուգահեռանիստի երեք չափումներն են:
Կանոնավոր բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը	$S = \frac{1}{2}Ph$ $S = \frac{Q}{\cos\varphi}$	P–ն հիմքի պարագիծն է, h–ը՝ հարթագծի երկարությունը, Q–ն հիմքի մակերեսն է, φ–ն հիմքի կողմին առընթեր երկնիստ անկյան մեծությունն է:
Բուրգի ծավալը	$V = \frac{1}{3}QH$	Q–ն հիմքի մակերեսն է, H–ը բարձրության երկարությունն է:

Կանոնավոր հատած բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը	$S=\frac{1}{2}(P+P_1)h$	P–ն, P_1–ը հիմքերի պարագծերն են, h–ը հարթագծի երկարությունն է:
Հատած բուրգի ծավալը	$V=\frac{H}{3}(Q+q+\sqrt{Qq})$	Q–ն, q–ն հիմքերի մակերեսներն են, H–ը՝ բարձրության երկարությունը:

Պտտման մարմիններ

Գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը	$S = 2\pi RH$, $S = \pi DH$	R–ը, H–ն շառավղի և բարձրության երկարություններն են, D–ն տրամագծի երկարությունն է:
Գլանի ծավալը	$V = \pi R^2H$, $V = \frac{\pi D^2H}{4}$	R–ը շառավղի երկարությունն է, D–ն՝ տրամագծի երկարությունը, H–ը՝ բարձրության երկարությունը:
Կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը	$S = \pi RL$	R–ը շառավղի երկարությունն է, L–ը՝ ծնիչի երկարությունը:
Կոնի ծավալը	$V = \frac{1}{3}\pi R^2H$	R–ը շառավղի երկարությունն է, H–ը՝ բարձրության երկարությունը:
Հատած կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը	$S = \pi(R + r)L$	R–ը և r–ը հիմքերի շառավիղների երկարություններն են, L–ը՝ ծնիչի երկարությունը:
Հատած կոնի ծավալը	$V = \frac{\pi H}{3}(R^2+r^2+R\cdot r)$	R–ը և r–ը հիմքերի շառավիղների երկարություններն են, H–ը՝ բարձրության երկարությունը:
Գնդային մակերևույթի մակերեսը	$S = 4\pi R^2$, $S = \pi D^2$	R–ը, D–ն շառավղի և տրամագծի երկարություններն են:
Գնդի ծավալը	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V = \frac{1}{6}\pi R^3$	R–ը և D–ն շառավղի և տրամագծի երկարություններն են:
Սեգմենտային մակերևույթի մակերեսը	$S = 2\pi RH$	R–ը գնդային մակերևույթի շառավղի երկարությունն է, H–ը՝ մակերևույթի բարձրության երկարությունը:
Գնդային սեգմենտի ծավալը	$V = \frac{\pi H^2}{3}(3R - H)$	R–ը գնդի շառավղի երկարությունն է, H–ը՝ սեգմենտի բարձրության երկարությունը:
Գնդային սեկտորի ծավալը	$V = \frac{2}{3}\pi R^2H$	R–ը գնդի շառավղի երկարությունն է, H–ը՝ գնդային սեգմենտի բարձրության երկարությունն է:

ՀԱՎԵԼՎԱԾ 5

ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՆՅՈՒԹԻ ՈՒՍՈՒՑՈՒՄԸ ԸՍՏ ՌԴ–ՈՒՄ ԳՈՐԾՈՂ ԱՅԼԸՆՏՐԱՆՔԱՅԻՆ ԾՐԱԳՐԵՐԻ

I. Ըստ Մ. Ի. Մորո, Յու. Մ. Կոլյագին, Մ. Ա. Բանտովա և այլոց ծրագրի

Առաջին դասարան

Կետ, գիծ, ուղիղ և կոր գծեր: Բեկյալ: Բազմանկյուն:

Անկյուն: Բազմանկյան գագաթները, կողմերը: Հատվածի *երկարությունը*:

Երկրորդ դասարան

Բեկյալի երկարություն: Բազմանկյան պարագիծ:

Ուղիղ և ոչ ուղիղ անկյուններ: Ուղղանկյուն (քառակուսի):

Ուղղանկյան հանդիպակաց կողմերի և անկյունագծերի հատկությունները: Ուղիղ անկյան կառուցումը: Ուղղանկյան, քառակուսու կառուցումը վանդակավոր թղթի վրա:

Երրորդ դասարան

Մակերես: Մակերեսի միավորներ, քառակուսի սանտիմետր, քառակուսի դեցիմետր: Ուղղանկյան (քառակուսու) մակերեսը: Երկրաչափական պատկերների նշանակումը տառերով: Շրջանագիծ, շրջան: Շրջանագծի (շրջանի) կենտրոն, շառավիղ, տրամագիծ: Եռանկյունների տեսակները. հավասարասրուն, հավասարակողմ, ոչ հավասարակողմ:

Չորրորդ դասարան

Ծառագայթ: Անկյուն: Անկյունների տեսակները. ուղիղ, սուր, բութ: Մակերեսի միավորները. քառակուսի միլիմետր, քառակուսի սանտիմետր, քառակուսի դեցիմետր, քառակուսի մետր, քառակուսի կիլոմետր, ար, հեկտար, առնչություններ դրանց միջև:

Եռանկյունների տեսակները. ուղղանկյուն, սուրանկյուն, բութանկյուն:

Ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսը:

Խնդիրների լուծում երկրաչափական պատկերների ճանաչման վերաբերյալ, պատկերի տրոհումը մասերի և դրանցից նոր պատկերի կազմում, գծագրական եռանկյան, քանոնի, կարկինի օգնությամբ պատկերների կառուցում:

II. Ըստ Լ. Գ. Պետերսոնի ծրագրի

Առաջին դասարան

Երկրաչափական պատկերների ճանաչում և անվանում. քառակուսի, ուղղանկյուն, եռանկյուն, շրջան, գունդ, գլան, կոն, բուրգ, զուգահեռանիստ, խորանարդ:

Պատկերների համեմատում և ճերկում: Պատկերի տրոհումը մասերի և այդ մասերից նոր պատկերի կազմում: Վանդակավոր թղթի վրա պատկերված եռանկյան, ուղղանկյան տրոհված վանդակների հաշվում:

Կետ: Գիծ (բաց և փակ): Բեկյալ: Բազմանկյուն:

Բազմանկյան գագաթները, կողմերը:

Երկրորդ դասարան

Ուղիղ: Ճառագայթ, հատված, բեկյալ: Բեկյալ գծի երկարությունը: Բազմանկյան պարագիծը: Հարթություն: Անկյուն: Ուղիղ անկյուն: Ուղղանկյուն:

Քառակուսի: Պատկերի մակերես և դրա չափումը:

Բազմանկյան մակերեսը: Խորանարդ: Խորանարդի կողերը, նիստերը: Ուղղանկյուն զուգահեռանիստ և դրա ծավալը: Շրջանագիծ, շրջան:

Երրորդ դասարան

Հարթության վրա երկրաչափական պատկերի ձևափոխություն: Համաչափելի պատկերներ: Պատկերների միավորում և հատում:

Չորրորդ դասարան

Ուղղանկյուն եռանկյուն, դրա կողմերը և մակերեսը:

Մակերեսի մոտավոր հաշվում: Անկյունների չափումը: Անկյունաչափ: Փռված անկյուն: Կից և հակադիր անկյուններ: Չափումների միջոցով երկրաչափական պատկերների հատկությունների հետազոտում:

III. Ըստ Ն. Բ. Իստոմինայի ծրագրի

Առաջին դասարան

Կետ: Գիծ (կոր և ուղիղ): Ճառագայթ: Հատված:

Թվային ճառագայթ: Բեկյալ: Համաչափելի պատկերներ:

Երկրորդ դասարան

Անկյուն: Ուղիղ, սուր, բութ անկյուններ:

Ուղղանկյուն: Քառակուսի: Բազմանկյուն: Շրջանագիծ, շրջան:

Երրորդ դասարան

Պատկերի մակերես: Տարբեր չափման միավորների օգնությամբ մակերեսների համեմատում (գործնականորեն):

Պալետ: Պատկերների մակերեսների հաշվում:

Ուղղանկյան պարագիծը և մակերեսը:

Համաչափելի պատկերներ: Համաչափության առանցք:

Տրված առանցքի նկատմամբ համաչափելի պատկերների կառուցում քանոնի, կարկինի և անկյունաքանոնի կիրառմամբ:

Խորանարդ, դրա պատկերացումը: Խորանարդի գագաթները, կողերը: Խորանարդի փռվածքը:

Չորրորդ դասարան

Համաչափելի պատկերների կառուցում (եռանկյուն, ուղղանկյուն, շրջանագիծ) տրված առանցքի նկատմամբ:

Երկրաչափական մարմինների փռվածք:

IV. Ըստ Ն. Գ. Սալմինայի և Վ. Ա. Տարասովի ծրագրի

Երկրորդ դասարան

Առանցքային համաչափություն: Ուղիղ, կետ, հատված: Հատվածի երկարություն: Բեկյալ: Բեկյալի երկարություն: Եռանկյուն: Ուղղանկյուն: Եռանկյան, ուղղանկյան պարագծերը: Բազմանկյուն: Երկրաչափական պատկերների տրոհումը մասերի:

Երրորդ դասարան

Հարթության վրա առարկաների, օբյեկտների դիրքը և նշանակումը:

Կենտրոնական և առանցքային համաչափություն:

Կորագիծ երկրաչափական պատկերները հարթության վրա (շրջան, շրջանագիծ, կիսաշրջան, օղակ):

Պարզ երկրաչափական պատկերները և մարմինները տարածությունում. խորանարդ, զուգահեռանիստ, բուրգ, գունդ:

Երկրաչափական ոչ բարդ խնդիրների լուծում. պարագծերի հաշվում և կառուցումներ:

Չորրորդ դասարան

Հարթության վրա օբյեկտների դիրքը և նշանակումը: Ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգի ներմուծումը: Այդ համակարգում խնդիրների քննարկում:

Կենտրոնական և առանցքային համաչափություն:
Համաչափ պատկերների օրինակներ:
Մակերեսի հասկացությունը: Մակերեսի միավորներ:
Քառակուսու, ուղղանկյան մակերեսները: Հավասարամեծ պատկերներ, դրանց մակերեսները:
Երկրաչափական բովանդակությամբ խնդիրներ:

ՀԱՎԵԼՎԱԾ 6

Ըստ գործող ծրագրի՝ երկրաչափական նյութից ուսուցվում է.

1–ին դասարանում.

Խորանարդ, ուղղանկյունանիստ, գունդ, քառանիստ (եռանկյուն բուրգ), կոն, գլան:

Քառակուսի, եռանկյուն, ուղղանկյուն, շրջան (որպես տարածական մարմինների վրա եղած պատկերներ):

Կետ, գիծ, ճառագայթ, հատված: Հատվածի չափումը (կարկինով, չափանիշով): Չափման միավոր՝ սանտիմետր: Հատվածի մասեր:

Քառանկյուն, կողմերը, գագաթները: Քառանիստ (եռանկյուն բուրգ), նիստերը, գագաթները:

Հնգանկյուն, հնգաթև աստղ: Բեկյալ (բաց, փակ):

Խորանարդ, նիստերը:

Բազմանկյուն:

Պատկերի տրոհումը մասերի: Ամբողջի և մասի (մասերի) միջև հարաբերություններ:

Դեցիմետր:

2– րդ դասարանում.

Բեկյալի երկարության հաշվումը: Պարագիծ, ծանոթ բազմանկյունների պարագծերի հաշվումը:

3–րդ դասարանում.

Պատկերների համընկնելը: Պարզ պատկերները երկու հավասար մասի բաժանելը:

Գաղափար պատկերի համաչափության մասին, համաչափ պատկերների օրինակներ:

Շրջանագիծ, շրջան: Զարդանախշերի գծագրում շրջանագծերի միջոցով:

Գաղափար մակերեսի մասին, քառակուսու, ուղղանկյան մակերեսը, մակերեսի միավորներ:

4–րդ դասարանում.

Մակերեսի գնահատականներ: Մակերեսի մոտավոր հաշվում:

Անկյուն: Անկյունների համեմատումը: Անկյունների չափումը: Փոխադրիչ:

Նպատակահարմար ենք համարում հիպագայում ծրագրերում կատարել փոփոխություններ և երկրաչափական նյութի ուսուցումը իրականացնել.

1–ին դասարանում.

Պատկերացումներ հարթ և տարածական պատկերների մասին. եռանկյուն, քառակուսի, ուղղանկյուն, շրջան, գունդ, խորանարդ, գլան, կոն, ուղղանկյունանիստ:

Կետ, գիծ, հատված, ճառագայթ, բեկյալ գիծ: Հատվածի երկարության չափումը քանոնի օգնությամբ: Սանտիմետր:

Փակ բեկյալ գիծ: Բազմանկյուն: Երկրաչափական հարթ պատկերի տրոհումը մասերի և այդ մասերից նոր պատկերների ստանալը:

Հատվածների չափում դեցիմետրերով և սանտիմետրերով: Հատվածների գումար:

2–րդ դասարանում.

Անկյուն, ուղիղ և ոչ ուղիղ անկյուններ: Բեկյալ գծի երկարությունը: Պարագիծ:

Ուղղանկյան, եռանկյան պարագծերի հաշվում (գործնականորեն):

Հավասարակողմ և ոչ հավասարակողմ եռանկյուններ:

Վանդակավոր թղթի վրա ուղիղ անկյան, ուղղանկյան, քառակուսու կառուցումը:

3–րդ դասարանում.

Շրջանագիծ, շրջան: Շրջանագծի կենտրոն, շառավիղ, տրամագիծ: Կարկինի օգնությամբ շրջանագծի կառուցում:

Ուղղանկյան հանդիպակաց կողմերի և անկյունների հատկությունները (իրար հավասար լինելը): Երկրաչափական պատկերների նշանակումը տառերով և դրանք անվանելը:

Կարկինի օգնությամբ շրջանագծի բաժանումը 6 հավասար մասերի:

Ուղիղ, սուր, բութ անկյուններ: Եռանկյունների տեսակները ըստ անկյունների. սուրանկյուն, ուղղանկյուն, բութանկյուն:

Եռանկյունների տեսակները ըստ կողմերի. հավասարակողմ, հավասարասրուն, անհավասարակողմ:

Համաչափություն ուղիղի և կետի նկատմամբ: Համաչափ պատկերների օրինակներ: Պատկերների համընկնելը: Պարզ պատկերների բաժանումը երկու հավասար մասի:

4–րդ դասարանում.

Հարթ պատկերների մակերես: Մակերեսի միավորներ:

Մակերեսի չափում պալետի կիրառմամբ: Ուղղանկյան, քառակուսու մակերեսների հաշվումը:

Երկրաչափական բովանդակությամբ խնդիրների լուծում:

Իսկ հանրահաշվական նյութի ուսուցումն իրականացնել հետևյալ հաջորդականությամբ.

2–րդ դասարանում.

Թվային արտահայտություններ:

Հավասարում $x \pm a = b$, $a \pm x = b$ տեսքի հավասարումների լուծում:

Խնդիրների լուծում՝ հավասարում, արտահայտություն կազմելով:

3–րդ դասարանում.

Պարզ տեսքի հավասարումների լուծում:

Երկու փոփոխականով արտահայտություններ ($a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : c$) և դրանց արժեքների հաշվումը փոփոխականների տրված արժեքների դեպքում:

4–րդ դասարանում.

$x \pm a = b \pm c$, $a - x = c \pm d$, $x - a = b \pm c$ տեսքի հավասարումների լուծում:

Բազմապատկման և բաժանման գործողությունների անհայտ բաղադրիչը գտնելու վերաբերյալ հավասարումների լուծում ($x \cdot a = b$, $a \cdot x = b$, $a : x = b$, $x : a = b$):

Այնպիսի հավասարումների լուծում, երբ անհրաժեշտ է լինում երկու անգամ օգտվել թվաբանական գործողությունների և արդյունքների կապերից ($(x + 13) + 7 = 21$, $x \cdot 3 + 5 = 17$ և այլն):

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. **Արածաւյան Լ.**, Երկրաչափություն–7, Եր., «Զանգակ–97», 2006:
2. **Արածաւյան Լ. և ուրիշներ**, Երկրաչափություն–8, Երկրաչափություն–9, Երկրաչափություն–10 դասագրքեր, Եր., 2001–2007:
3. **Խիկանդարյան Մ. Ա., Խիկանդարյան Մ. Ս.**, Թվաբանական գործողությունների ուսուցումը կրտսեր դպրոցում: Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ, Եր., «Զանգակ–97», 2009:
4. **Խիկանդարյան Մ. Ա., Խիկանդարյան Մ. Ս.**, Տարրական դպրոցում տեքստային խնդիրների ուսուցումը: Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ, Եր., «Զանգակ–97», 2010:
5. **Խիկանդարյան Մ. Ա., Խիկանդարյան Մ. Ս.**, Կրտսեր դպրոցում մեծությունների ուսուցման տեխնոլոգիան: Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ, Եր., «Զանգակ–97», 2009:
6. **Խիկանդարյան Մ. Ա.**, Ալգորիթմական մտածողության ուսուցումը տարրական դասարաններում, Եր., «Լույս», 1983:
7. Տարրական դասարաններում մաթեմատիկայից գործող ծրագրերը, դասագրքերը:
8. **Վիլենկին Ն. Յու. և ուրիշներ**, «Մաթեմատիկա–4» դասագիրք, Եր., «Լույս», 1976:
9. **Կոլյակի Վ. Մ. և ուրիշներ**, Երկրաչափություն. 9–10–րդ դասարաններ, Եր., «Լույս», 1985:
10. **Պոգորելով Ա. Վ.**, Երկրաչափություն. 6–10–րդ դասարաններ, Եր., «Լույս», 1985:
11. **Белошистая А. В.**, Методика обучения математике в начальной школе. Курс лекции, М., ВЛАДОС, 2005.
12. **Истомина Н. Б.**, Методика обучения математики в начальной школе. Развивающее обучение, Смоленск, „Ассоциация XXI век", 2005.
13. **Моро М. И., Пышкало А. М.**, Методика обучения математики в 1–3 классах, М., „Просвещение", 1978, 336 с.
14. Теоретические основы методики обучения математике в начальных классах (Под редакцией **Н. Б. Истоминой**), М., Воронеж, 1996, 224 с.
15. **Тихоненко А. В.**, Технология изучения понятия величин на уроках математики в начальной школе, Ростов–на–Дону, „Феникс", 2006, 218 с.
16. **Тихоненко А. В. и другие**, Теоретические и методические основы изучения математики в начальной школе, Ростов–на–Дону, „Феникс", 2006, 218 с.
17. **Шадрина И. В.**, Обучение математике в начальных классах, М., „Школьная пресса", 2003, 143 с.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ս. Ա. ԻՍԿԱՆԴԱՐՅԱՆ

ՏԱՐՐԱԿԱՆ ԴՊՐՈՑՈՒՄ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԵՎ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՆԱԽԱԳԻՏԵԼԻՔՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻԿԱՆ

Ուսումնամեթոդական ձեռնարկ

Հրատարակչության տնօրեն՝
ԷՄԻՆ ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Գեղարվեստական խմբագիր՝
ԱՐԱ ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Սրբագրիչ՝
ՍԵՐԺ ՄԵԼՔՈՒՄՅԱՆ

Համակարգչային ձևավորումը՝
ԳՈՀԱՐ ԳՐԻԳՈՐՅԱՆԻ

789994115068

www.zangak.am
www.dasagirq.am
www.book.am